

## 考虑地球自转的探月返回跳跃式再入制导研究

王泽国<sup>1,2</sup>, 孟 斌<sup>1,2†</sup>, 赵云波<sup>3</sup>

(1. 北京控制工程研究所, 北京 100190; 2. 空间智能控制技术重点实验室, 北京 100190;

3. 浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

**摘要:** 本文考虑探月返回飞行器跳跃式再入的制导问题. 针对考虑地球自转的探月返回飞行器不确定非线性动力学, 设计了基于观测器的近似反馈线性化制导律. 由于初始再入时空气密度近似为零, 因此阻力初始观测误差近似为零. 针对该特点, 研究了基于观测器的控制律的峰值问题, 给出了无峰值现象的控制律的简化设计方法. 首次证明了速度内动态是有界输入有界状态的, 为制导律的设计提供了基础. 证明了制导误差是一致最终有界的, 并且界是随着初始观测误差的减小而趋于零; 进一步由于阻力初始观测误差近似为零, 因此制导误差近似为零. 最后, 针对Apollo命令舱, 通过数学仿真验证了本文方法的有效性. 本文为包括火星再入、月球再入等飞行器的制导问题提供了研究途径和基础.

**关键词:** 探月返回飞行器; 跳跃式再入; 地球自转; 基于观测器的近似反馈线性化制导律; 内动态; 闭环性质

**引用格式:** 王泽国, 孟斌, 赵云波. 考虑地球自转的探月返回跳跃式再入制导研究. 控制理论与应用, 2018, 35(6): 732 – 740

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## On the guidance for the Lunar return skip reentry considering the earth rotation

WANG Ze-guo<sup>1,2</sup>, MENG Bin<sup>1,2†</sup>, ZHAO Yun-bo<sup>3</sup>

(1. Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. Science and Technology on Space Intelligent Control Laboratory, Beijing 100190, China;

3. College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

**Abstract:** We address the guidance problem for the Lunar return spacecraft skip reentry. Taking the Earth rotation into consideration, we perform an observer-based approximate feedback linearization guidance law design for the uncertain and nonlinear dynamics of the Lunar return spacecraft. Firstly, the peak phenomenon of observer-based controllers is considered. The air density approximates to zero when the initial reentry, so the initial observation error of drag is also zero approximately. Considering this feature, a simplified design for peak-free phenomenon is given for the observer-based controllers. Then, the guidance design problems are considered. It is first proved that the internal dynamics is bounded-input-bounded-state, which constructs the basis for the design of guidance law. The closed-loop properties are proved that the guidance errors are uniformly ultimately bounded, and tend to zero with the diminish of initial observed errors. Combining that the initial observation errors approximate to zero, the guidance errors are also zero approximately. Finally, simulation on Apollo Command Module illustrates the effectiveness of the proposed theoretical method. This paper has laid the foundations for the research on Mars reentry and the Lunar reentry etc.

**Key words:** the Lunar return spacecraft; skip reentry; the Earth rotation; the observer-based approximate feedback linearization guidance law; internal dynamics properties; closed-loop properties

**Citation:** WANG Zeguo, MENG Bin, ZHAO Yunbo. On the guidance for the Lunar return skip reentry considering the earth rotation. *Control Theory & Applications*, 2018, 35(6): 732 – 740

### 1 引言(Introduction)

自从1969年美国发射的Apollo 11号载人飞船成功登陆月球, 实现了人类载人登月的梦想, 月球探索

就成为了各航天大国一直以来所关注的目标. 中国提出了探月“三步走”的计划, 包括“绕、落、回”3个阶段. 其中“回”就是指探月返回, 需要探月返回再入地

收稿日期: 2017-04-23; 录用日期: 2017-12-13.

†通信作者. E-mail: mengb@amss.ac.cn; Tel.: +86 10-68744801.

本文责任编辑: 康宇.

国家自然科学基金项目(61333008, 61273153)资助.

Supported by the National Natural Science Foundation of China (61333008, 61273153).

球的制导技术. 对于Apollo这种太空舱式的飞行器, 由于它的升阻比较低, 若想飞出长的航程, 唯一的方法就是采取跳跃式再入飞行<sup>[1]</sup>, 即飞行器首先再入大气层内, 然后跃出大气层外, 最后再一次进入大气层并着陆. 飞行器再入过程中的大气环境难以精确测量, 导致其动力学中的气动项具有较大不确定性. 且存在动力学本身的未建模动态和风等外部扰动, 并且需要满足过载和热的限制, 以及精确着陆等要求, 这些问题对于飞行器的制导带来较大的难度. 由于探月返回跳跃式再入的飞行时间较长, 因此地球自转对制导精度具有较大影响. 当考虑地球自转时, 飞行器制导动力学具有更强的非线性. 因此, 探月返回跳跃式再入的制导问题对于非线性控制理论和方法提出了新的难题, 也因此成为相关领域研究的热点问题.

一般来说, 飞行器再入制导的方法分为两种, 标准轨道制导法和预测制导法. 这两种方法均在跳跃式再入中得到了一定的研究<sup>[1-5]</sup>. 由于标准轨道制导法已经成功应用于航天飞机的再入制导中, 因而受到广泛关注<sup>[6-7]</sup>. 目前, 在标准轨道制导法中, 反馈线性化方法和基于观测器的制导方法得到广泛研究. 如上所述, 探月返回飞行器具有强非线性、未建模动态、不确定性和外部扰动等控制难点. 由反馈线性化方法的设计原理可知, 反馈线性化制导精度受动力学的未建模动态和不确定性等影响较大. 相比之下, 基于观测器的制导方法具有一定优势. 该方法已经得到一定研究, 包括滑模观测器<sup>[8]</sup>和高增益观测器<sup>[9]</sup>等.

探月返回跳跃式再入制导问题虽然已经得到广泛研究, 但仍存在如下问题有待进一步探讨. 首先, 由于飞行时间和航程较长, 地球自转对制导精度影响较大, 目前尚无包含地球自转的相关研究. 当考虑地球自转时, 飞行器动力学的非线性和耦合更强, 导致制导律的设计和分析更加困难. 第二, 内动态的性质对于闭环系统具有重要影响, 但目前尚无有关速度内动态的性质的理论分析结果. 针对非线性动力学, 其研究有一定难度. 第三, 在基于观测器的控制方法中, 由于被观测量的初始状态不确定, 因此难以设置与其相同的观测器的初始状态, 从而导致初始观测偏差. 如果被观测量的初始状态不确定性过大, 将导致初始观测偏差过大, 从而导致观测器误差方程的暂态过程超调过大, 也即观测量严重偏离被观测真值. 当把观测量用于控制律进行补偿时, 由于与真实被观测值相差过大, 不仅不能起到补偿作用, 而且可能导致控制效果变差, 甚至起到适得其反的作用, 最坏情形致使系统发散. 这种现象称为峰值问题. 该问题是基于观测器补偿方法的关键问题之一, 需要进行深入分析. 针对这个问题, 在文献[10]和文献[11]中分别提出了饱和控制方法和零控制方法, 在理论上解决了峰值问题. 但是控制饱和界和零控制区间与未知函数相关, 因此难以给

出具体数值, 需要在仿真中进行调试, 给应用增加了复杂性.

本文针对上述问题开展了深入研究. 首先研究了基于观测器设计方法的峰值问题, 针对再入飞行器的特点, 给出了无峰值的简化控制方法. 进一步研究了探月返回飞行器跳跃式再入的制导问题. 证明了速度内动态是有界输入有界状态的, 为(近似)反馈线性化制导方法提供了理论基础. 在此基础上, 设计了基于观测器的近似反馈线性化制导律, 证明了闭环性质. 本文的研究结果可以推广到火星和月球再入等再入制导问题.

## 2 预备知识和问题描述(Preliminaries and problem formulations)

针对考虑地球自转的复杂飞行器再入动力学, 本文采用基于观测器的近似反馈线性化方法设计制导律, 并利用性能恢复的思想<sup>[10]</sup>进行闭环分析. 下面首先简单介绍一些相关结果.

### 2.1 预备知识(Preliminaries)

在文献[10]中, 采用性能恢复的思想, 通过与精确反馈线性化控制结果进行对比, 给出了基于观测器的近似反馈线性化控制方法的闭环性能. 考虑单输入单输出非线性系统的标准形式<sup>[10]</sup>:

$$\dot{x} = Ax + B[f(x, z, w) + g(x, z, w)u], \quad (1)$$

$$\dot{z} = f_0(x, z, w), \quad (2)$$

$$y = Cx, \quad (3)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  是系统状态,  $u \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  分别表示控制输入和测量输出,  $w \in \mathbb{R}^l$  表示干扰,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]_{1 \times n},$$

$w(t)$ ,  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$ ,  $f_0(\cdot)$  和内动态(2)满足假设1-3.

**假设 1**  $w(t)$  属于一个已知紧集  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^l$ , 并且  $\dot{w}(t)$  有界.

**假设 2** 非线性函数  $f(\cdot)$ ,  $g(\cdot)$  和  $f_0(\cdot)$  未知;  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  是连续可微的, 并且具有局部Lipschitz导数;  $g(\cdot) \geq g_0$ ,  $g_0 > 0$  已知;  $f_0(\cdot)$  是局部Lipschitz的.

**假设 3** 存在径向无界正定函数  $\mathcal{V}_0(z)$ , 使得对于所有的  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^m$  和  $w \in \mathcal{W}$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial z}(z) f_0(x, z, w) \leq 0, \quad \forall \|z\| \geq \chi_z(x, w),$$

这里  $\chi_z(x, w)$  是非负连续函数.

在性能恢复的思想中,式(1)–(3)的控制性能,是通过与针对 $f$ 和 $g$ 已知时所设计的精确反馈线性化的控制性能进行对比给出的.首先给出当 $f$ 和 $g$ 已知时的精确反馈线性化控制律

$$u_L = \frac{-f(x, z, w) + \phi(x)}{g(x, z, w)},$$

其中 $\phi(\cdot)$ 为使得系统

$$\dot{x} = Ax + B\phi(x) \quad (4)$$

是全局渐近稳定和局部指数稳定的状态反馈控制律.则存在Lyapunov函数 $\mathcal{V}_s(x)$ 满足

$$\frac{\partial \mathcal{V}_s}{\partial x}(x)[Ax + B\phi(x)] \leq -\Psi(x), \quad \forall x, \quad (5)$$

这里 $\Psi(x)$ 是一正定函数.由假设3可知,存在常数 $c_0 \geq 0$ 和 $\mathcal{K}_\infty$ 函数 $\alpha(\cdot)$ ,使得对于任意正常数 $c$ ,

$$\mathcal{V}_0(z) \leq c_0 + \alpha(c)$$

是式(2)关于 $x(t) \in \{\mathcal{V}_s(x) \leq c\}$ ,  $w(t) \in \mathcal{W}$ 的正不变集.定义紧集

$$\Omega_c = \{\mathcal{V}_s(x) \leq c\} \times \{\mathcal{V}_0(z) \leq c_0 + \alpha(c)\}. \quad (6)$$

另一方面,当 $f$ 和 $g$ 未知时,利用观测器实时估计未知函数,利用估计的值设计近似反馈线性化控制律.观测器以及基于它的近似反馈线性化控制律分别为

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[\hat{\sigma} + \hat{g}(\hat{x})u] + H(\epsilon)(y - C\hat{x}), \quad (7)$$

$$\dot{\hat{\sigma}} = \left(\frac{\alpha_{n+1}}{\epsilon^{n+1}}\right)(y - C\hat{x}), \quad (8)$$

$$u(\hat{x}, \hat{\sigma}) = \frac{-\hat{\sigma} + \phi(\hat{x})}{\hat{g}(\hat{x})}, \quad (9)$$

这里 $\hat{g}(\cdot) \geq g_0 > 0$ 是需要设计的二次连续可微函数, $\hat{x}$ 是系统状态 $x$ 的观测量, $\hat{\sigma}$ 是扩张状态 $f + (g - \hat{g})u$ 的观测量,

$$H(\epsilon) = \left[\frac{\alpha_1}{\epsilon} \quad \dots \quad \frac{\alpha_n}{\epsilon^n}\right]^T$$

是观测器的增益, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ 使得方程

$$s^{n+1} + \alpha_1 s^n + \dots + \alpha_{n+1} = 0$$

的根均为负实数, $\epsilon > 0$ 是一个需要设计的较小参数.

为了解决峰值问题,设计饱和函数

$$u_M(\hat{x}, \hat{\sigma}) = M \text{sat}\left(\frac{u(\hat{x}, \hat{\sigma})}{M}\right), \quad (10)$$

其中

$$M > \max_{(x,z) \in \Omega_c, w \in \mathcal{W}} \left| \frac{-f(x, z, w) + \phi(x)}{g(x, z, w)} \right|.$$

下面的引理给出了闭环系统的性质.为避免混淆,记式(4)的状态为 $x^*$ .

**引理 1**<sup>[10]</sup> 考虑系统(1)–(3),观测器(7)–(8)和控制律(10)组成的闭环系统.如果假设1–3成立,

$$k_g = \max_{(x,z) \in \Omega_c, w \in \mathcal{W}} \left| \frac{g(x, z, w) - \hat{g}(x)}{\hat{g}(x)} \right| < 1, \quad (11)$$

系统的初始状态属于 $\Omega_c$ 的某个紧子集,观测器的初始状态属于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的某个紧子集,那么存在 $\bar{\epsilon} > 0$ ,使得对于所有的 $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ ,

- 1) 系统状态 $x(t)$ 有界;
- 2)  $\|x(t) - x^*(t)\| \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0, t \geq 0$ ;
- 3)  $\|x(t)\| \leq \delta(\epsilon)$ 是一致最终有界的,其中:

$$\delta(\epsilon) \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0.$$

## 2.2 问题描述(Problem formulations)

本文考虑探月返回飞行器无量纲再入动力学<sup>[12]</sup>

$$\dot{r} = V \sin \gamma, \quad (12)$$

$$\dot{V} = -D - \frac{\sin \gamma}{r^2} + W_V, \quad (13)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{L \cos \sigma}{V} + \left(V^2 - \frac{1}{r}\right) \frac{\cos \gamma}{Vr} + W_\gamma, \quad (14)$$

其中:无量纲方程求导针对的时间为 $\tau = t/\sqrt{R_0 g_0}$ ,  $R_0 = 6378136.3$  m和 $g_0 = 9.81$  m/s<sup>2</sup>分别表示地球平均半径和地球表面重力加速度; $r$ 表示地心距(无量纲化尺度 $R_0$ ), $V$ 表示相对速度(无量纲化尺度 $V_{\text{scale}} = \sqrt{R_0 g_0}$ ), $\gamma$ 表示飞行路径角; $L$ 和 $D$ 分别表示升力和阻力,

$$\begin{cases} L = \frac{\rho(V_{\text{scale}}V)^2 S_{\text{ref}} C_L}{2mg_0}, \\ D = \frac{\rho(V_{\text{scale}}V)^2 S_{\text{ref}} C_D}{2mg_0}, \end{cases} \quad (15)$$

$\rho$ 表示大气密度, $\rho = \rho_0 e^{-\beta h}$ 采用文献[13]中的大气数据拟合得到, $\rho_0 = 1.313$ , $\beta = 775.5814$ ; $h = r - 1$ 表示高度, $S_{\text{ref}}$ 表示参考面积, $m$ 表示质量, $C_L$ 和 $C_D$ 分别表示升力和阻力系数;

$$W_V = \Omega^2 r \sin \gamma,$$

$$W_\gamma = 2\Omega + \frac{\Omega^2 r \cos \gamma}{V},$$

其中: $\Omega = 7.2921151 \times 10^{-5}$  rad/s表示地球自转角速度(无量纲化尺度 $\sqrt{R_0/g_0}$ ),无量纲化后 $\Omega = 0.05879$  rad, $\sigma$ 表示倾侧角, $U$ 是系统的控制输入,记 $U = \cos \sigma$ .

本文研究探月返回跳跃式再入制导问题.针对考虑地球自转的探月返回再入制导动力学(12)–(14),当存在初始再入偏差和气动不确定性时,设计倾侧角 $\sigma$ ,使得阻力 $D$ 跟踪参考阻力 $D_r$ .

## 3 峰值问题(The peaking phenomenon)

本节讨论峰值问题.针对探月返回再入制导问题的特点,给出了初始观测误差的一个条件,在该条件下,不需采用饱和控制等文献中的峰值问题控制方法<sup>[10]</sup>,引理1中有关闭环系统性能的结论仍然成立,并且无峰值现象.

首先给出一个关于初值问题的假设.在文献[10]的定理1的证明过程中,将系统状态分别减去观测器

状态, 然后通过变换组成了新的状态. 这里去掉饱和函数, 采用上述变换方法可以得到新的状态,

$$\eta = [\eta_1 \cdots \eta_{n+1}]^T, \quad (16)$$

其中:

$$\eta_i = \frac{x_i - \hat{x}_i}{\epsilon^{n+1-i}}, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$\eta_{n+1} = f + \Delta_g u(x, \hat{\sigma}) - \hat{\sigma},$$

$x_i$ 和 $\hat{x}_i$ 分别为 $x$ 和 $\hat{x}$ 的第 $i$ 个分量,  $\Delta_g = g(x) - \hat{g}(x)$ .

**假设4** 假设初始状态 $\eta(0) \in \Omega_{c1}$ , 其中:

$$\Omega_{c1} = \{\mathcal{U}(\eta) \leq c_1 \epsilon^2\},$$

$$\mathcal{U} = \eta^T P \eta,$$

$P$ 是正定矩阵,  $c_1 > 0$ 是常数<sup>[14]</sup>.

在上述假设下, 不需采用饱和限制, 直接利用式(9)进行控制, 即可得到引理1的结论.

**定理1** 考虑系统(1)–(3), 观测器(7)–(8)和控制律(9)组成的闭环系统. 如果假设1–4和式(11)成立, 系统的初始状态属于 $\Omega_c$ 的某个紧子集, 那么引理1的结论成立.

证明见附录1.

**注1** 假设4意味着初始观测误差非常小, 因此不会出现峰值现象.

**注2** 定理1用式(9)代替了饱和控制(10), 不需选取最大值 $M$ , 从而简化了设计.

**注3** 对于探月返回再入制导问题, 假设4成立. 这是由于, 该问题中被观测量是阻力, 在初始再入时, 空气密度非常小, 从而使得初始再入阻力非常小. 当选择观测器初值为零时,  $\eta(0)$ 近似为0. 因此假设4成立.

## 4 纵向再入制导动力学的性质(Properties of longitudinal reentry guidance dynamics)

本节讨论探月返回飞行器纵向再入制导动力学的性质, 重点给出内动态的性质, 为制导律的设计提供基础. 首先讨论坐标变换的性质.

### 4.1 坐标变换及相对阶(Properties of state transformation and relative degree)

由于阻力可以由惯性传感器直接测量, 并且飞行距离、过载和热限制等可以由阻力直接进行计算, 因此在制导律设计时一般选取阻力 $D$ 作为被控输出,  $(D, \dot{D}, V)$ 作为新的状态. 本节给出坐标变换的性质.

由式(12)–(15), 可得阻力的一阶导数和二阶导数分别为

$$\dot{D} = \left( \frac{2D}{V} \Omega^2 r - \beta D V \right) \sin \gamma - \frac{2D^2}{V} - \frac{2D \sin \gamma}{r^2 V}, \quad (17)$$

$$\ddot{D} = a + bU, \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} a = & -\beta \dot{D} V \sin \gamma - \frac{4D\dot{D}}{V} - \frac{2\dot{D} \sin \gamma}{r^2 V} + \\ & \frac{2\dot{D}}{V} \Omega^2 r \sin \gamma + 2\Omega^2 D \sin^2 \gamma + \frac{4D \sin^2 \gamma}{r^3} + \\ & \left( \frac{2D^2}{V^2} - \beta D \sin \gamma + \frac{2D \sin \gamma}{r^2 V^2} - \right. \\ & \left. \frac{2D}{V} \Omega^2 r \sin \gamma \right) \left( -D - \frac{\sin \gamma}{r^2} \right) + \\ & \left( -\beta D V - \frac{2D}{r^2 V} + \frac{2D}{V} \Omega^2 r \right) \cos \gamma \times \\ & \left( V^2 - \frac{1}{r} \right) \frac{1}{V r} + \\ & \left( \frac{2D^2}{V^2} - \beta D \sin \gamma + \frac{2D \sin \gamma}{r^2 V^2} - \right. \\ & \left. \frac{2D}{V} \Omega^2 r \sin \gamma \right) W_V + \\ & \left( -\beta D V - \frac{2D}{r^2 V} + \frac{2D}{V} \Omega^2 r \right) \cos \gamma W_\gamma, \end{aligned} \quad (19)$$

$$b = \left( -\beta D V - \frac{2D}{r^2 V} + \frac{2D}{V} \Omega^2 r \right) \frac{L}{V} \cos \gamma. \quad (20)$$

在假设2中假设了控制输入的系数为正数, 下面分析 $b$ 的符号. 将式(15)代入式(20), 通过记

$$L_0 = \frac{\rho_0 V^2 \text{scale} S_{\text{ref}} C_L}{2mg_0} > 0, \quad (21)$$

有

$$b = -D_0 L_0 e^{2\beta} e^{-2\beta r} V^2 \left( \beta V^2 + \frac{2}{r^2} - 2\Omega^2 r \right) \cos \gamma.$$

由 $r \approx 1$ ,  $\Omega = 0.0588$ ,  $\beta > 0$ , 可得

$$\beta V^2 > -\frac{2}{r^2} + 2\Omega^2 r, \quad (22)$$

可知当 $\cos \gamma \neq 0$ 时,

$$b < 0. \quad (23)$$

下面的定理给出坐标变换的性质.

**定理2** 针对式(12)–(14), 当 $\cos \gamma \neq 0$ 时, 由状态 $(r, V, \gamma)$ 到状态 $(D, \dot{D}, V)$ 的坐标变换为微分同胚变换; 以 $\cos \sigma$ 作为输入,  $D$ 作为输出, 系统的相对阶为2.

证明见附录2.

**注4** 定理2在整个再入过程均成立. 事实上, 在整个再入过程中,  $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ . 由文献[2]和文献[3]也可见Apollo在整个再入过程中的飞行路径角 $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

### 4.2 内动态的性质(Properties of internal dynamics)

上节证明了系统的相对阶是2, 则速度 $V$ 是内动态. 本节证明 $V$ 内动态是有界输入有界状态的.

记跃出点的状态和跃出后远地点地心距分别为 $(r_t, V_t, \gamma_t)$ 和 $r_A$ . 在跃出大气层后, 飞行器运动可以按

照二体运动分析,由文献[15]可知

$$r_A = \frac{r_t^2 \hat{V}_t^2 \cos^2 \gamma_t}{1 - \sqrt{(r_t \hat{V}_t^2 - 1)^2 \cos^2 \gamma_t + \sin^2 \gamma_t}}, \quad (24)$$

其中 $\hat{V}_t$ 表示跃出点绝对速度,由图1可得,

$$\hat{V}_t = \sqrt{(V_t \cos \gamma_t + \Omega r_t)^2 + (V_t \sin \gamma_t)^2}.$$

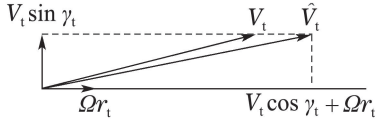


图1 速度向量

Fig. 1 The velocity vectors

下面首先给出两个假设:

#### 假设5

$$r_A < \sqrt[3]{\frac{1}{\Omega^2}}. \quad (25)$$

在下面的定理证明中将阻力曲线按照 $\dot{D}$ 的符号进行分段.对于 $\dot{D} \geq 0$ (不包括仅 $\dot{D} = 0$ 的单点情形)和 $\dot{D} < 0$ 段,记各段的时间长度为 $T_i (i = 1, 2, \dots)$ .

**假设6**  $\inf_i \{T_i\} \geq w_T > 0, i = 1, 2, \dots$ .这里 $w_T$ 为常数.也即在有限的飞行时间内可以分为有限段.

**定理3** 针对式(12)–(14),如果假设5和6成立,则存在径向无界正定函数

$$\mathcal{V}_0(V) = \frac{1}{2} V^2 \quad (26)$$

使得

$$\frac{\partial \mathcal{V}_0}{\partial V} \dot{V} < 0, \quad \forall V \geq \begin{cases} -\frac{\dot{D}}{p\beta D_{\min}(\sin \gamma)_{\max}}, & \dot{D} \geq 0, \\ 0, & \dot{D} < 0, \end{cases} \quad (27)$$

其中 $p \in (0, 1)$ ,

$$(\sin \gamma)_{\max} = \max_{\dot{D} \geq 0} \{\sin \gamma\} < 0,$$

$$D_{\min} = \min_{\dot{D} \geq 0} \{D\} > 0.$$

证明见附录3.

**注5** 一般情况下,式(25)成立. $r_A$ 越大,二次再入误差越大.因此一般情况下设计 $r_A < \sqrt[3]{1/\Omega^2} = 6.6133^{[1]}$ .

**注6** 式(25)给出了跃出点状态设计的依据.由式(24)–(25)可以由跃出点的状态表示.

**注7** 定理3首次给出了内动态是有界输入有界状态的性质,为各类再入飞行器制导提供了基础.

在文献[16]中指出,对于线性系统而言,零动态渐近稳定可以保证有界输入有界状态的性质.但是非线性系统可能不具备这一性质.为了更加深刻地认识速度内动态的性质,下面进一步分析零动态的稳定性.

记 $V_r, r_r, \gamma_r, U_r$ 为相应状态和输入在参考轨线上的取值,满足如下假设:

**假设7** 假设 $V_r, r_r, \gamma_r$ 满足式(13);阻力参考轨线 $D_r, \dot{D}_r$ 和 $\ddot{D}_r$ 是连续和有界的,并且满足

$$\ddot{D}_r = a_r(D_r, \dot{D}_r, V_r, r_r, \gamma_r) + b_r(D_r, \dot{D}_r, V_r, r_r, \gamma_r)U_r, \quad (28)$$

其中 $a_r$ 和 $b_r$ 为式(19)–(20)的自变量均取参考轨线上的值时,所得到的 $a$ 和 $b$ 的值.

由于地球自转导致零动态方程非常复杂,因此在下面的分析中忽略地球自转的影响.记

$$\lambda_r = -4D_r^2 - \dot{D}_r V_r.$$

**定理4** 假设 $\Omega = 0$ 和 $r = 1$ ,以及假设7成立.考虑式(12)–(14),其零动态 $V$ 的稳定性由参考轨线决定,

1) 如果 $\lambda_r < \bar{\lambda}_r, \bar{\lambda}_r < 0$ 为常数,则零动态 $V$ 是局部指数稳定的;

2) 如果 $\lambda_r > 0$ ,则零动态 $V$ 是不稳定的;

3) 如果 $\lambda_r$ 变号,则零动态 $V$ 是振荡的.

证明见附录4.

## 5 制导律设计和分析(Guidance law design and analysis)

本节针对考虑地球自转的探月返回再入制导动力学(12)–(14),按照定理1设计基于观测器的近似反馈线性化制导律,并证明其闭环系统性质.

将式(28)与阻力动力学(18)做差,可以得到误差动力学,

$$\Delta \ddot{D} = f_D + b \Delta U, \quad (29)$$

这里 $\Delta D = D - D_r, f_D = \Delta a + \Delta b U_r, \Delta a = a - a_r, \Delta b = b - b_r, \Delta U = U - U_r$ .通过把式(29)与式(1)–(3)比较,可知相应矩阵和函数的取值分别为

$$x = [\Delta D \quad \Delta \dot{D}]^T, z = V, u = -\Delta U, y = \Delta D, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], \quad f = f_D, w = D_r, g = -b > 0, f_0 = \dot{V}. \quad (30)$$

在制导律设计时,需要设计 $\hat{g}$ ,这里设计 $\hat{g}$ 为 $-b$ 在式(6) $\Omega_c$ 上的最大值.下面针对式(12)–(14)给出 $\Omega_c$ 的具体形式,在式(6)中, $\mathcal{V}_0$ 取式(26)的形式,

$$\mathcal{V}_s(x) = x^T P_s x, \quad (31)$$

$$P_s = \begin{bmatrix} \frac{K_d^2}{2K_p} + 1 & \frac{K_d}{2K_p} \\ \frac{K_d}{2K_p} & \frac{1}{K_p} \end{bmatrix} > 0,$$

其中  $K_p > 0, K_d > 0,$

$$c_0 = 0, \tag{32}$$

$$\alpha(c) = \mathcal{V}_0[\Gamma(\sqrt{c}\|P_s^{-1/2}\|)],$$

$$\Gamma(\Delta\dot{D}) = \begin{cases} \frac{\dot{D}_{r\max} + \Delta\dot{D}}{p\beta D_{\min}(\sin\gamma)_{\max}}, & \Delta\dot{D} \geq -\dot{D}_{r\max}, \\ 0, & \Delta\dot{D} < -\dot{D}_{r\max}, \end{cases} \tag{33}$$

其中  $\dot{D}_{r\max} = \max_{\dot{D} \geq 0} \{\dot{D}_r\}$ . 由假设 6-7 可知,  $\dot{D}_{r\max}$  存在.

下面的两个引理证明上面构造的  $\Omega_c$  满足第 2.1 节中的性质.

**引理 2** 考虑式(12)–(14), 如果假设 5-7 成立, 则  $\alpha(c)$  是  $\mathcal{K}_\infty$  函数, 且对于任意的  $c, \{\mathcal{V}_0(V) \leq \alpha(c)\}$  是  $V$  关于  $x \in \{\mathcal{V}_s(x) \leq c\}$  的不变集.

证明见附录 5.

在上述基础上, 按照定理 1 设计制导律, 包括三阶观测器和基于观测器的近似反馈线性化控制律, 观测器为

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B[\hat{\sigma} - \hat{g}\Delta U] + [\frac{\alpha_1}{\epsilon} \quad \frac{\alpha_2}{\epsilon^2}]^T(y - C\hat{x}), \\ \dot{\hat{\sigma}} = (\frac{\alpha_3}{\epsilon^3})(y - C\hat{x}), \end{cases} \tag{34}$$

其中  $A, B, C, \Delta U$  和  $y$  在(30)中给出;  $\hat{g}$  为常数, 满足

$$\hat{g} > \max_{x \in \Omega_c} \{-b\} > 0, \tag{35}$$

$\Omega_c$  由式(6)(26)(31)–(32)给出;  $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$  为使得方程  $s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0$  的根为负实数的常数;  $\epsilon$  是一个需要设计的较小正数. 控制律为

$$\Delta U = -\frac{-\hat{\sigma} + \phi(\hat{x})}{\hat{g}}, \tag{36}$$

其中  $\phi(\hat{x})$  为 PD 控制律

$$\phi(\hat{x}) = -[K_p \quad K_d]\hat{x}. \tag{37}$$

**引理 3** 对于式(37)中所设计  $\phi(x), \mathcal{V}_s$  满足式(5), 其中  $A$  和  $B$  在式(30)中给出.

**证** 由  $A$  和  $B$  的具体形式,  $K_p > 0, K_d > 0$  易证.

下述定理给出闭环系统的性质. 由于在探月返回初始再入时, 空气密度非常小, 因此  $D$  和  $\dot{D}$  也非常小. 这里假设:

**假设 8**  $\Delta D(0) = \Delta \dot{D}(0) = 0$ , 其中  $\Delta D(0)$  和  $\Delta \dot{D}(0)$  表示初始时刻的值.

**定理 5** 针对式(12)–(14), 设计三阶观测器(34)和控制律(36). 如果假设 5-8 成立, 初始状态  $(x(0), V(0)) \in \Omega_c$ , 那么  $x = [\Delta D \quad \Delta \dot{D}]^T$  满足引理 1 的结论.

证明见附录 6.

**注 8** 由假设 8, 假设 4 中  $\epsilon$  近似为零. 因此, 由定理 5 结论 3, 制导误差近似为零.

**注 9** 在式(35)中, 选择的  $c$  越大, 所设计的控制律吸引域越大, 但保守性越高.

### 6 数值仿真(Numerical simulations)

本节针对 Apollo 命令舱<sup>[1,3]</sup>, 设计定理 5 中给出的制导律, 通过数值仿真验证有效性.

在动力学(12)–(14)中,  $m = 5443.10844$  kg, 初始状态为:  $h_0 = 121.92$  km,  $V_0 = 10.63$  km/s,  $\gamma_0 = 6.5^\circ$ . 阻力参考轨迹由式(12)–(14)进行计算, 其中  $\gamma = 45^\circ$ . 所考虑的不确定性包括: 大气密度偏差 30%, 初始速度偏差  $\pm 2\%$ . 定理 5 中的设计参数如表 1 所示.

表 1 设计参数

Table 1 Design parameters

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$K_p$	$K_d$	$\hat{g}$	$\epsilon$
2.03	1.06	0.03	1300	450	700	0.01

图 2 和图 3 分别给出了大气密度和初始速度偏差下的观测器的观测结果, 以及近似反馈线性化制导律的制导结果. 从该仿真结果可以看出, 制导效果良好, 无峰值现象.

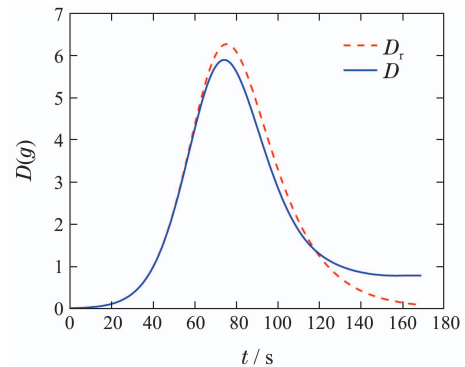


图 2(a) 大气密度偏差 30% 情形下的观测结果

Fig. 2(a) Observation result with 30% air density deviation

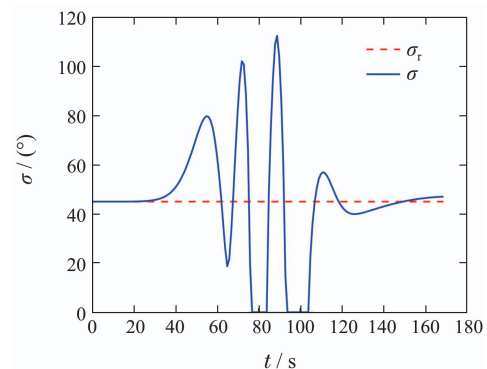


图 2(b) 大气密度偏差 30% 情形下的制导结果

Fig. 2(b) Guidance result with 30% air density deviation

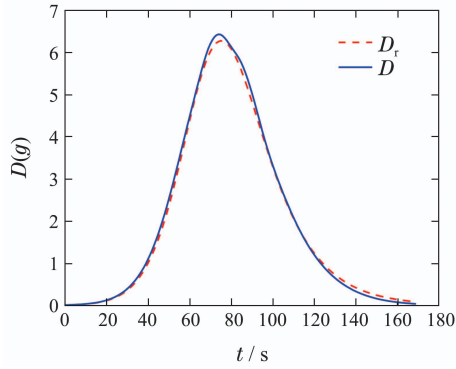


图 3(a) 速度初始偏差2%情形下的观测结果

Fig. 3(a) Observation result with 2% initial velocity deviation

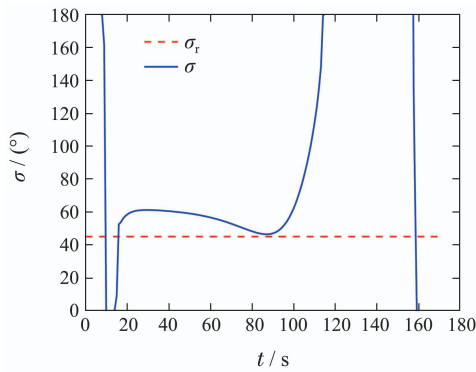


图 3(b) 速度初始偏差2%情形下的制导结果

Fig. 3(b) Guidance result with 2% initial velocity deviation

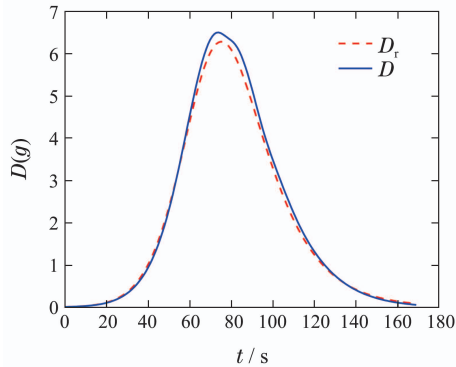


图 3(c) 速度初始偏差-2%情形下的观测结果

Fig. 3(c) Observation result with -2% initial velocity deviation

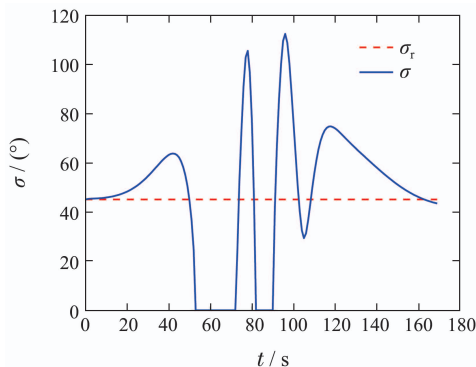


图 3(d) 速度初始偏差-2%情形下的制导结果

Fig. 3(d) Guidance result with -2% initial velocity deviation

## 7 结论(Conclusions)

针对考虑地球自转的探月返回跳跃式再入制导问题,证明了速度内动态是有界输入有界状态的,设计了基于观测器的近似反馈线性化制导律,给出了参数的选择原则,并证明了阻力跟踪偏差近似为零.所给出的方法不需线性化,并且未对动力学进行简化,因此制导精度更高,适用范围广.最后通过仿真验证了所设计制导律的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] MOSELEY P E. The Apollo entry guidance: a review of the mathematical development and its operational characteristics [R]. TRW Report, 69-FMT-791, 1969.
- [2] ROENNEKE A, CORNWELL P. Trajectory control for a low-lift re-entry vehicle [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1993, 16(5): 927 - 933.
- [3] BRUNNER C W, LU P. Skip entry trajectory planning and guidance [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2008, 31(5): 1210 - 1219.
- [4] GARCÍA-LLAMA E. Analytic development of a reference trajectory for skip entry [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2011, 34(1): 311 - 317.
- [5] LUO Z F, ZHONG H B, TANG G J. Skip entry guidance using numerical predictor-corrector and patched corridor [J]. *Acta Astronautica*, 2015, 117: 8 - 18.
- [6] HARPOLD J, GRAVES C. Shuttle entry guidance [J]. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1979, 37(3): 239 - 268.
- [7] MEASE K D, KREMER J P. Shuttle entry guidance revisited using nonlinear geometric methods [J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 1994, 17(6): 1350 - 1356.
- [8] TALOLE S E, BENITO J, MEASE K D. Sliding mode observer for drag tracking in entry guidance [C] // *Proceedings of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. South Carolina: AIAA, 2007: 1 - 16.
- [9] MA K, KHALIL H K, YAO Y. Guidance law implementation with performance recovery using an extended high-gain observer [J]. *Aerospace Science & Technology*, 2013, 24(1): 177 - 186.
- [10] FREIDOVICH L B, KHALIL H K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(10): 2324 - 2334.
- [11] XUE Wenchao, HUANG Yi. On performance analysis of ADRC for nonlinear uncertain systems with unknown dynamics and discontinuous disturbances [C] // *Proceedings of Chinese Control Conference*. [S.l.]: [S.n.], 2013: 1102 - 1107.  
(薛文超, 黄一. 带有未建模动态和不连续干扰的非线性系统ADRC性能分析 [C] // 中国控制会议. [S.l.]: [S.n.], 2013: 1102 - 1107.)
- [12] GUO Xingling, ZHANG Yan. The approximate solution for long-time and long-range longitudinal gliding flight based on segment constant gliding angle [J]. *China Journal of Astronautics*, 2005, 26(6): 712 - 716.  
(郭兴玲, 张珩. 基于分段常滑翔角的长航时纵向远程滑翔飞行方程近似解 [J]. 宇航学报, 2005, 26(6): 712 - 716.)
- [13] U.S. National Oceanic and Atmospheric Administration, *US Standard Atmosphere* [S]. Washington D.C.: United States Department of Commerce, 1976.
- [14] ATASSI A N, KHALIL H K. A separation principle for the stabilization of a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(9): 1672 - 1687.

[15] WIE B K. *Space Vehicle Dynamics and Control* [M]. Reston, USA: American Institution Aeronautics and Astronautics Incorporated, 2008.

[16] MARINO R, TOMEI P. *Nonlinear Control Design: Geometric, Adaptive and Robust* [M]. London: Prentice Hall Int. (UK) Ltd., 1995.

[17] GUO Lei. *An Introduction to Control Theory* [M]. Beijing: Science Press, 2005.  
(郭雷. 控制理论导论 [M]. 北京: 科学出版社, 2005.)

[18] KHLIL H K. *Nonlinear Systems* [M]. London: Prentice Hall Int. (UK) Ltd., 2002.

附录 (Appendix)

附录 1 定理 1 的证明 (Proof of Theorem 1)

证 由式(1)–(3)和式(7)–(9)计算可以得到下述系统:

$$\epsilon \dot{\eta} = \Lambda \eta - \bar{B}_1 \frac{\Delta g}{\hat{g}(x)} \alpha_{n+1} \eta_1 + \epsilon [\bar{B}_1 \Delta_2 + \bar{B}_2 \Delta_3], \quad (A1)$$

其中:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_{n+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2 = \dot{f} + \dot{\Delta}_g u(x, \hat{\sigma}) + \Delta_g \frac{\partial u(x, \hat{\sigma})}{\partial x} \dot{x},$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{\epsilon} (g(x)(u(\hat{x}, \hat{\sigma}) - u(x, \hat{\sigma})) + \hat{g}(x)u(x, \hat{\sigma}) - \hat{g}(\hat{x})u(\hat{x}, \hat{\sigma})).$$

由文献[10]可知, 当式(11)成立时, 对于充分小的  $\epsilon$ ,  $\Omega_c \times \Omega_{c1}$  是式(1)–(3)和式(A1)的不变集. 由假设 4,  $\eta$  和 (9) 的定义, 可知  $\hat{x}(t)$  和  $\hat{\sigma}(t)$  有界. 结合  $u$  的连续性可知  $u(\hat{x}, \hat{\sigma})$  也是有界的. 记

$$M_1 > \max\{|u(\hat{x}, \hat{\sigma})|, \max_{(x,z) \in \Omega_c, w \in W} \left| \frac{-f(x, z, w) + \phi(x)}{g(x, z, w)} \right|\},$$

则有  $M_1 \geq M$  和  $u(\hat{x}, \hat{\sigma}) = u_{M_1}(\hat{x}, \hat{\sigma})$ .

综上可知引理 1 的条件均成立. 因此, 其结论成立.

证毕.

附录 2 定理 2 的证明 (Proof of Theorem 2)

证 下面首先证明坐标变换为微分同胚变换. 通过计算可知 Jacobian 变换矩阵  $J_a$  为

$$J_a = \begin{bmatrix} \frac{\partial D}{\partial r} & 0 & \frac{\partial D}{\partial V} \\ \frac{\partial \dot{D}}{\partial r} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial \gamma} & \frac{\partial \dot{D}}{\partial V} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

易见

$$|J_a| = D_0^2 e^{2\beta} e^{-2\beta r} \beta V^3 (\beta V^2 + \frac{2}{r^2} - 2\Omega^2 r) \cos \gamma,$$

其中

$$D_0 = \frac{\rho_0 V_{scale}^2 S_{ref} C_D}{2mg_0} > 0. \quad (A2)$$

结合式(22), 可知当  $\cos \gamma \neq 0$  时,  $J_a$  非奇异. 也即当  $\cos \gamma \neq 0$  时, 该坐标变换是微分同胚变换.

由式(23)直接可证系统的相对阶为 2. 证毕.

附录 3 定理 3 的证明 (Proof of Theorem 3)

在证明定理 3 之前, 首先给出如下引理.

引理 4 针对式(12)–(14), 如果假设 5 成立, 那么当  $\dot{r} \geq 0$  时,  $\dot{V} < 0$ .

证 由  $r \leq r_A$  和假设 5 可得  $r < \sqrt[3]{1/\Omega^2}$ . 即  $1/r^2 > \Omega^2 r$ . 由式(12)易知, 当  $\dot{r} \geq 0$  时  $\sin \gamma \geq 0$ . 结合  $D > 0$ , 可知

$$\dot{V} = -D - \left(\frac{1}{r^2} - \Omega^2 r\right) \sin \gamma < 0.$$

证毕.

下面给出定理 3 的证明.

证 下面按照  $\dot{D} \geq 0$  和  $\dot{D} < 0$  两种情形分析  $\mathcal{V}_0$  的性质.

1) 考虑  $\dot{D} \geq 0$  情形. 首先利用反证法证明  $\sin \gamma < 0$ . 如果存在时刻  $t_0$ , 使得  $\sin \gamma(t_0) \geq 0$ . 则由  $D, \beta, V > 0$ , 式(12)和式(18), 可知  $\dot{V}(t_0) > 0$  和  $\dot{r}(t_0) \geq 0$ , 这与引理 4 矛盾. 所以当  $\dot{D} \geq 0$  时,  $\sin \gamma < 0$ . 因此, 当  $\dot{D} = 0$  时,

$$\dot{V} = \frac{\beta V^2}{2} \sin \gamma < 0. \quad (A3)$$

考虑  $\dot{D} \geq 0$  (不包括仅  $\dot{D} = 0$  的单点情形). 由假设 6 以及  $\sin \gamma$  和  $D$  的连续性可知,  $\max_{D \geq 0} \{\sin \gamma\}$  和  $\min_{D \geq 0} \{D\}$  存在, 结合  $\sin \gamma < 0$  和  $D > 0$ , 记

$$(\sin \gamma)_{\max} = \max_{D \geq 0} \{\sin \gamma\} < 0,$$

$$D_{\min} = \min_{D \geq 0} \{D\} > 0.$$

把式(12)代入式(18), 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{V \dot{D}}{2D} + \frac{\beta V^2}{2} \sin \gamma \leq \\ &= \frac{V \dot{D}}{2D_{\min}} + \frac{\beta V^2}{2} (\sin \gamma)_{\max} = \\ &= \frac{(1-p)\beta V^2 (\sin \gamma)_{\max}}{2} + \\ &= \frac{p\beta D_{\min} V^2 (\sin \gamma)_{\max} + V \dot{D}}{2D_{\min}}, \end{aligned}$$

这里  $0 < p < 1$ . 所以当

$$V \geq -\frac{\dot{D}}{p\beta D_{\min} (\sin \gamma)_{\max}} \geq 0$$

时,

$$\dot{V} < \frac{(1-p)\beta V^2 (\sin \gamma)_{\max}}{2} < 0.$$

因此由式(26), 结合式(A3), 有  $\dot{\mathcal{V}}_0 = V \dot{V} < 0$ .

2) 考虑  $\dot{D} < 0$  情形. 由式(15)(A2)和(18)可得

$$\dot{D} = D_0 e^{\beta} (-\beta e^{-\beta r} V^2 \dot{r} + 2e^{-\beta r} V \dot{V}) < 0.$$

由上式可以推得如下 3 种情形:  $\dot{r} > 0$ , 或者  $\dot{V} < 0$ , 或者  $\dot{r} > 0$  且  $\dot{V} < 0$ . 由引理 4 知, 当  $\dot{r} > 0$  时,  $\dot{V} < 0$ . 综上, 当  $\dot{D} < 0$  时,  $\dot{V} < 0$ . 所以由式(26), 有  $\dot{\mathcal{V}}_0 = V \dot{V} < 0$ .

综合上述分析, 可知当

$$V \geq \begin{cases} -\frac{\dot{D}}{p\beta D_{\min} (\sin \gamma)_{\max}}, & \dot{D} \geq 0, \\ 0, & \dot{D} < 0 \end{cases}$$



时  $\dot{V}_0 = V\dot{V} < 0$ . 证毕.

#### 附录4 定理4的证明(Proof of Theorem 4)

证 首先给出速度偏差方程. 忽略地球自转角速度, 假设  $r = 1$ , 由式(13)和(17)可得

$$\dot{V} = -D + \frac{2D^2 + \dot{D}V}{\beta DV^2}.$$

其中在(17)中, 由于最后1项  $\ll$  第2项, 因此忽略了该项. 记  $\Delta V = V - V_r$ , 由假设7可得

$$\Delta \dot{V} = \frac{2D^2 + \dot{D}V}{\beta DV^2} - \frac{2D_r^2 + \dot{D}_r V_r}{\beta D_r V_r^2} - \Delta D,$$

这里  $\Delta D = D - D_r$ . 由此可得零动态为

$$\Delta \dot{V} = \frac{2D_r^2 + \dot{D}_r V}{\beta D_r V^2} - \frac{2D_r^2 + \dot{D}_r V_r}{\beta D_r V_r^2}. \quad (\text{A4})$$

下面按照文献 [18] 中定理4.13证明定理的结论. 首先求取Jacobian矩阵:

$$\frac{\partial \Delta \dot{V}}{\partial \Delta V} = \frac{-4D_r^2 - \dot{D}_r V}{\beta D_r V^3}.$$

易见其为局部有界和局部Lipschitz的. 进一步, 在原点处线性化可得

$$\left. \frac{\partial \Delta \dot{V}}{\partial \Delta V} \right|_{\Delta V=0} = \frac{-4D_r^2 - \dot{D}_r V_r}{\beta D_r V_r^3}. \quad (\text{A5})$$

因此结论成立. 证毕.

#### 附录5 引理2的证明(Proof of Lemma 2)

在证明引理2之前, 首先证明如下引理.

**引理5** 如果假设5和6成立, 则当  $V \geq \Gamma(\Delta \dot{D})$  时,  $\dot{V}_0 < 0$ , 其中  $V_0$  在式(26)中给出.

证 下面在假设5和6下, 由式(27)进行证明. 下面分3种情形. 当  $\Delta \dot{D} < -\dot{D}_r \max$  时,  $\dot{D} < 0$ , 结合  $V \geq 0$ , 由式(27)可知  $\dot{V}_0 < 0$ . 当  $-\dot{D}_r \max \leq \Delta \dot{D} < -\dot{D}_r$  时,  $\dot{D} < 0$ . 进一步由式(33)可知

$$V \geq \Gamma(\Delta \dot{D}) = -\frac{\dot{D}_r \max + \Delta \dot{D}}{p\beta D_{\min}(\sin \gamma)_{\max}} \geq 0.$$

结合  $\dot{D} < 0$ , 由式(27)可知  $\dot{V}_0 < 0$ . 当  $\Delta \dot{D} \geq -\dot{D}_r$  时,  $\dot{D} \geq 0$ . 由式(33)可知

$$V \geq -\frac{\dot{D}_r \max + \Delta \dot{D}}{p\beta D_{\min}(\sin \gamma)_{\max}} \geq -\frac{\dot{D}}{p\beta D_{\min}(\sin \gamma)_{\max}} \geq 0.$$

由式(27)可知  $\dot{V}_0 < 0$ . 引理得证. 证毕.

下面证明引理2.

证  $\alpha(c)$  的  $\mathcal{K}_\infty$  性质由其定义易证. 如需进一步证明引

理结论, 只需证明当  $x \in \{\mathcal{V}_s \leq c\}$  时, 在  $\{\mathcal{V}_0 \leq \alpha(c)\}$  的边界上  $\dot{V}_0 < 0$ . 当  $x \in \{\mathcal{V}_s \leq c\}$  时, 由导出范数  $\|P_s^{-1/2}\|$  的定义知

$$\max_{x^T P_s x \leq c} \|x\| = \sqrt{c} \|P_s^{-1/2}\|.$$

在  $\{\mathcal{V}_0 \leq \alpha(c)\}$  的边界上, 由

$$\mathcal{V}_0(V) = \mathcal{V}_0[\Gamma(\sqrt{c} \|P_s^{-1/2}\|)]$$

可得  $V = \Gamma(\sqrt{c} \|P_s^{-1/2}\|)$ , 也即需证当

$$V = \Gamma\left(\max_{x^T P_s x \leq c} \|x\|\right)$$

时,  $\dot{V}_0 < 0$ . 下面由引理5进行证明. 当  $\Delta \dot{D} < -\dot{D}_r \max$  时, 由  $\Gamma$  的定义可知  $\Gamma(\Delta \dot{D}) = 0$ , 因此  $V \geq \Gamma(\Delta \dot{D})$ . 当  $\Delta \dot{D} \geq -\dot{D}_r \max$  时, 结合函数  $\Gamma$  的单增性质可知

$$V = \Gamma\left(\max_{x^T P_s x \leq c} \|x\|\right) \geq \Gamma(\Delta \dot{D}).$$

由引理5, 引理得证. 证毕.

#### 附录6 定理5的证明(Proof of Theorem 5)

证 利用定理1进行证明. 首先证明假设1-4成立. 由式(30)和假设7可知假设1成立. 由式(30)中各函数的表达式可知假设2中要求的连续性和局部Lipschitz性质成立. 加之,  $g = -b$  在  $\Omega_c$  内具有最小值, 大于0. 因此假设2成立. 由定理3知假设3成立. 由式(16)中  $\eta$  的定义, 结合假设8和式(30), 可知

$$\eta_1(0) = \eta_2(0) = \eta_3(0) = 0,$$

因此假设4成立. 下面证明式(11)成立. 由式(11)和式(35)可知

$$k_g = \max_{x \in \Omega_c} \left| \frac{-b - \hat{g}}{\hat{g}} \right| < 1,$$

因此由定理1可知结论成立. 证毕.

#### 作者简介:

王泽国 (1988-), 男, 博士, 工程师, 2017年博士毕业于中国空间技术研究院, 主要从事航天器制导与控制研究. E-mail: wang.zeguo@qq.com;

孟斌 (1973-), 女, 博士, 研究员, 2005年博士毕业于中科院数学与系统科学研究院, 主要从事特征模型理论、航天器制导与控制研究. E-mail: mengb@amss.ac.cn;

赵云波 (1981-), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 2014年入选国家青年千人计划, 2008年博士毕业于英国南威尔士大学, 主要从事网络化控制系统和系统生物学方面的研究, 在高水平国际期刊和顶尖会议发表学术论文50余篇. E-mail: ybzhao@zjut.edu.cn.