



具有领导者的高阶线性多运动体系统的群智汇集趋同

马翠芹¹, 杜梅¹, 赵云波^{2*}

1. 曲阜师范大学数学科学学院, 曲阜 273165;

2. 中国科学技术大学自动化系, 合肥 230026

*E-mail: ybzhaoy@ustc.edu.cn

收稿日期: 2021-08-14; 接受日期: 2021-10-14; 网络版发表日期: 2022-08-05

国家自然科学基金(批准号: 61973183、62173317)、山东省自然科学基金(编号: ZR2019MF041)和山东省高等学校青创科技计划(编号: 2019KJ1007)资助项目

摘要 本文研究了具有领导者的高阶线性多运动体系统的群智汇集趋同问题. 利用运动体与其邻居的信息, 分别对跟随者设计了状态反馈型和输出反馈型控制协议, 并利用矩阵Riccati代数方程、矩阵分析等工具, 给出了系统实现领导-跟随者群智汇集趋同的充分条件. 研究表明, 当领导者和跟随者所组成的多运动体系统的通信拓扑交互平衡并且存在一棵生成树时, 只要合理地选取满足条件的控制增益, 系统在所给出的控制协议作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同. 特别地, 当为跟随者设计输出反馈型控制协议时, 借助误差系统可以将领导-跟随者群智汇集趋同问题转化为静态输出反馈问题. 当系统的输入输出矩阵满足一定的秩条件时, 系统在所设计的输出反馈型控制协议作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

关键词 多运动体系统, 群智汇集趋同, 领导-跟随者, 加权符号图

1 引言

多运动体系统(multi-agent systems, MASs)是由多个相互作用的运动体所组成的系统, 各运动体之间通过协作完成单个运动体所不能完成的大量复杂工作. 近年来, 多运动体系统的分布式协调控制在无人机编队系统^[1,2]、交通车辆系统^[3]、分布式传感网络系统^[4]等领域广泛应用, 受到了众多学者的关注. 该问题已成为当前控制学科中的热点问题. 趋同问题(consensus problem)是多运动体系统分布式协调控制中的一个基

本问题. 所谓趋同是指系统中各运动体的状态通过相互作用最终达成一致^[5,6]. 目前, 趋同问题的相关研究都是假设各运动体之间的相互作用是合作的^[5~12]. 但在现实生活中, 各运动体之间不仅存在合作关系, 也存在竞争关系, 如两党制社会中的政治问题^[13]、竞争双方的企业联合问题^[14]. 合作和竞争关系并存的多运动体系统在宏观上往往呈现出更加复杂的行为. 实际上, 在许多现实场景中, 如混合动物种群的觅食^[15]、机器人的分拣^[16]、大规模无人机群为完成作战任务进行的分组汇集^[17]等, 系统中的运动体通常被分成多

引用格式: 马翠芹, 杜梅, 赵云波. 具有领导者的高阶线性多运动体系统的群智汇集趋同. 中国科学: 技术科学, 2023, 53: 307-316
Ma C Q, Du M, Zhao Y B. Cluster consensus for leader-following high-order linear multiagent systems (in Chinese). Sci Sin Tech, 2023, 53: 307-316, doi: 10.1360/SST-2021-0375

个簇/群, 在同一个簇/群内的运动体的状态实现趋同, 而处于不同簇/群内的运动体的状态可以不同, 多运动体系统的这种行为被称为群智汇集趋同. 含有领导者的多运动体系统在生物、社会等领域比较常见. 例如, 在蜜蜂种群中, 研究发现种群中5%的蜜蜂(称为“领导者”)能够引导其余的蜜蜂(称为“跟随者”)到达新的蜂巢地点^[18]. 根据多运动体系统是否含有领导者, 群智汇集趋同的研究可以分为两类: 无领导者的群智汇集趋同^[19-21]和有领导者的群智汇集趋同^[22-25]. 目前, 针对具有领导者的多运动体系统的群智汇集趋同问题的研究成果丰富. 例如, 文献[22]针对二阶非线性多运动体系统, 给出了确保系统实现领导-跟随者群智汇集趋同的判定准则; 文献[23]将文献[22]中运动体的动力学推广到离散时间情形; 文献[24]针对两种不同的通信框架, 研究了二阶积分器型多运动体系统的领导-跟随者群智汇集趋同问题, 给出了保证系统在两种框架下实现群智汇集趋同的关于耦合强度的通信拓扑条件; 文献[25]针对一般线性多运动体系统, 为每个跟随者设计了事件驱动型控制器, 证明了无论运动体状态的估计值如何, 只要在控制器中选取合适的参数, 系统就可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

然而, 以上研究都是基于运动体间的关系仅是合作的或者运动体间是要么合作要么竞争的二分关系. 需要指出的是, 系统中运动体之间的关系绝不止是合作、竞争这两种简单的二分关系. 例如, 在意见形成问题中, 意见的形成过程可以看作是各运动体对所接收到的信息进行加权的过成. 在此类问题中, 我们通常用加权符号图表示系统中运动体间的相互作用关系, 其中加权表示运动体间合作或者竞争关系的程度. 文献[26]用加权符号图表示运动体间的竞争-合作关系, 并且将加权的合作-竞争关系拓扑分为三类, 分别针对这三种类型的拓扑设计了控制协议, 证明了一阶积分器型的多运动体系统在所设计的控制协议作用下可以实现群智汇集趋同. 进一步, 文献[27]将文献[26]中的拓扑分类进一步推广, 主要考虑了两种拓扑结构: 多路径和有向循环, 并且分别研究了这两类拓扑结构下一阶积分器型多运动体系统的群智汇集趋同问题. 目前, 针对加权的合作-竞争关系下多运动体系统群智汇集趋同的研究还比较少, 主要集中于一阶、二阶^[28]多运动体系统. 本文将针对具有领导者的高阶线性多运动体系统, 研究加权的合作-竞争关系下的群智汇集

趋同问题. 我们为每个跟随者分别设计了状态反馈型和输出反馈型控制协议, 并且证明了系统在这两类控制协议作用下都可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

本文结构如下: 第2部分, 介绍文中用到的图论的相关知识及所研究的问题; 第3部分, 设计了两种类型的控制协议, 分别给出了系统在这两种协议作用下实现群智汇集趋同的充分条件; 第4部分, 给出了仿真实例, 验证了理论结果的有效性; 第5部分, 对全文进行了总结.

2 预备知识和问题描述

2.1 预备知识

一般地, 如果我们将系统中的每个运动体都看作一个节点, 运动体之间的通信关系看作边, 那么, 可以用加权符号图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$ 来表示运动体间的通信拓扑. 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ 表示所有节点组成的集合, $\mathcal{E} \subseteq \{(j, i) : i, j \in \mathcal{V}, j \neq i\}$ 表示所有边组成的集合, $\mathbf{H} = (h_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示邻接矩阵, $h_{ij} \geq 0$ 并且 $h_{ij} > 0 \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$. 由此可见, 邻接矩阵 \mathbf{H} 仅表示运动体间有无通信. 而运动体间的合作或竞争关系的程度则用加权矩阵 $\mathbf{R} = (r_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示, 其中 $r_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow (j, i) \in \mathcal{E}$. 若 $r_{ij} > 0$, 则表示运动体 i 与 j 之间是合作的关系; 若 $r_{ij} < 0$, 则表示运动体 i 与 j 之间是竞争的关系. 设 $\mathbf{L} = (l_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示加权符号图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$ 对应的Laplacian矩阵, 其中 $l_{ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij}$, $l_{ij} = -h_{ij} r_{ij}$. 设有向路径 $\mathcal{P}_{ij} = \{(i, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_k, j)\} \subset \mathcal{E}$, 其中 i, v_1, \dots, v_k, j 分别表示不同的节点. 沿着有向路径 \mathcal{P}_{ij} , 其相应的相互作用的权重乘积记为 $P_{ij} = r_{v_1 i} r_{v_2 v_1} \dots r_{j v_k}$. 特别地, 当 $i=j$ 时, 有向路径 \mathcal{P}_{ij} 形成了有向循环 \mathcal{C}_p , 其相应的相互作用的权重乘积记为 $C_i = r_{v_1 i} r_{v_2 v_1} \dots r_{i v_k}$. 定义加权符号图 $\widehat{\mathcal{G}} = (\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{R}})$, 其中 $\widehat{\mathbf{H}} = (\widehat{h}_{ij})$, $\widehat{\mathbf{R}} = (\widehat{r}_{ij})$ 满足

$$\widehat{h}_{ij} = \begin{cases} h_{ji}, & (j, i) \notin \mathcal{E}, (i, j) \in \mathcal{E}, \\ h_{ij}, & \text{其余情形}, \end{cases}$$

$$\widehat{r}_{ij} = \begin{cases} r_{ji}^{-1}, & (j, i) \notin \mathcal{E}, (i, j) \in \mathcal{E}, \\ r_{ij}, & \text{其余情形}. \end{cases}$$

可见, 加权符号图 $\widehat{\mathcal{G}} = (\mathcal{V}, \widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{R}})$ 相当于将图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$ 中的边变成了双向边. 如果图 $\widehat{\mathcal{G}}$ 中所有有向循环的权重乘积都等于 1, 那么称 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$ 是交互平衡的.

引理1^[26] 若加权符号图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$ 存在一棵生成树, 并且是交互平衡的, 则存在可逆矩阵 $\mathbf{P} = \text{diag}(P_{11}, \dots, P_{1n})$, 使得 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{P} = \mathbf{L}_s = (l_{s,ij})_{n \times n}$, 其中 $l_{s,ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij}$, $l_{s,ij} = -h_{ij}$.

引理2^[6] 设矩阵 $\mathbf{M} = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 若 \mathbf{M} 中的元素均满足: $m_{ii} \geq 0$, $m_{ij} \leq 0$, $\forall i \neq j$, 并且对于 $\forall i = 1, \dots, n$, 都有 $\sum_{j=1}^n m_{ij} = 0$, 则 \mathbf{M} 至少有一个零特征根, 并且所有的非零特征根都在右半开平面内. 特别地, \mathbf{M} 仅有一个零特征根当且仅当与 \mathbf{M} 对应的有向图存在一棵生成树.

2.2 问题描述

本文研究由一个领导者和 N 个跟随者组成的多运动体系统, 第 i 个跟随者的动力学为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\mathbf{u}_i, \\ \mathbf{y}_i &= \mathbf{C}\mathbf{x}_i, i=1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_i \in \mathbb{R}^p$, $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^q$ 分别表示第 i 个跟随者的状态, 控制输入和输出. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$ 分别为系统矩阵、输入矩阵和输出矩阵. 领导者标记为 0, 其动力学为

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_0, \quad (2)$$

式中, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^q$ 分别表示领导者的状态和输出.

本文中, 用加权符号图 $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{\mathcal{V}}, \widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{R}})$ 表示由领导者和跟随者所组成的多运动体系统的通信拓扑, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{R})$ 表示跟随者之间的通信拓扑. 则 $\mathcal{V} = \{1, \dots, N\}$, $\widehat{\mathcal{V}} = \mathcal{V} \cup \{0\}$, $\widehat{\mathcal{E}} \subseteq \widehat{\mathcal{V}} \times \widehat{\mathcal{V}}$, $\widehat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_0 \mathbf{1}_N & \mathbf{H} \end{pmatrix}$,

$\widehat{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_0 \mathbf{1}_N & \mathbf{R} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_0 = \text{diag}(h_{10}, \dots, h_{N0})$. 此处, 我们用

h_{i0} 表示领导者与第 i 个跟随者之间的通信关系, $h_{i0} \geq 0$ 且 $h_{i0} > 0 \Leftrightarrow (0, i) \in \widehat{\mathcal{E}}$. $\mathbf{R}_0 = \text{diag}(r_{10}, \dots, r_{N0})$, 其中 r_{i0} 表示领导

者与第 i 个跟随者之间合作或竞争关系的程度, 并且 $r_{i0} \neq 0 \Leftrightarrow (0, i) \in \widehat{\mathcal{E}}$. 用 \mathbf{L} 表示由领导者和跟随者所组成的加权符号图 $\widehat{\mathcal{G}}$ 的 Laplacian 矩阵, 则由定义知

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ -h_{10}r_{10} & & & \\ \vdots & \mathbf{L} + \text{diag}(h_{10}, \dots, h_{N0}) & & \\ -h_{N0}r_{N0} & & & \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H}_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{1}_N & \mathbf{L} + \mathbf{H}_0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

式中, \mathbf{L} 表示仅由跟随者所组成的加权符号图 \mathcal{G} 的 Laplacian 矩阵.

注1 文献[29]研究了无领导者的高阶线性多运动体系统的群智汇集趋同问题, 那里要求系统矩阵 \mathbf{A} 的特征根均在左半平面内, 并且至少有一个特征根的实部为零. 本文中, 对于含有领导者的多运动体系统, 我们要求 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是能稳的即可.

本文旨在针对具有领导者的多运动体系统, 为每个跟随者设计分布式控制协议, 使跟随者能够在加权的合作-竞争关系下实现领导-跟随者群智汇集趋同.

系统实现领导-跟随者群智汇集趋同的定义如下.

定义1 对于系统(1), 若存在控制协议 $\{\mathbf{u}_i(t), i=1, \dots, N\}$, 使得对于任意给定的初始状态 $\mathbf{x}_i(0), i=1, \dots, N$, 都有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_i(t) - \alpha_i \mathbf{x}_0(t)) = 0, i = 1, \dots, N,$$

式中, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 由自主体之间的相互作用关系所决定, 则称系统(1)在加权的合作-竞争关系下能够实现领导-跟随者群智汇集趋同.

注2 由定义1可知, 系统实现领导-跟随者群智汇集趋同后, 跟随者们最终被分成多个群, 若 $\alpha_i = \alpha_j$, 则表示跟随者 i 与 j 处于同一个群; 若 $\alpha_i \neq \alpha_j$, 则表示跟随者 i 与 j 处于不同群. 特别地, 若 $\alpha_i = 1, i=1, \dots, N$, 则表示系统中所有跟随者的状态都与领导者的状态达成一致, 即领导-跟随者群智汇集趋同退化为领导-跟随者趋同; 若 $\alpha_i \in \{\pm 1\}, i=1, \dots, N$, 则表示领导者-跟随者群智汇集趋同退化为领导-跟随者双向趋同.

对于系统(1)-(2), 作如下假设:

- (U₁) (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是能稳的;
- (U₂) (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 是能检测的;
- (U₃) $\widehat{\mathcal{G}} = (\widehat{\mathcal{V}}, \widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\mathcal{H}}, \widehat{\mathcal{R}})$ 是交互平衡的;

(U₄) $\bar{\mathcal{G}} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{R}})$ 存在一棵生成树.

为了使系统实现领导-跟随者群智汇集趋同, 下面我们将分别为跟随者设计状态反馈型控制协议和输出反馈型控制协议.

3 主要结果

3.1 状态反馈型控制协议

为第*i*个跟随者设计如下状态反馈型控制协议:

$$u_i(t) = \rho \mathbf{F} \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij} (r_{ij} \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)) + h_{i0} (r_{i0} \mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_i(t)) \right], \quad (3)$$

式中, $\rho \in \mathbb{R}$ 是增益常数, $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p \times n}$ 是增益矩阵.

控制协议的设计与通信拓扑密切相关. 由式(3)可知, 第*i*个跟随者的控制协议仅利用了它自身和与它有通信关系的邻居运动体的信息.

下面, 将证明系统(1)在控制协议(3)作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

定理1 对于系统(1), 如果(U₁), (U₃)-(U₄)成立, 并且下列条件满足:

(i) $\rho \geq \frac{1}{2 \min_{i \in \Omega} \text{Re}(\lambda_i)}$, 其中 $\Omega = \{i: \text{Re}(\lambda_i) > 0, \lambda_i \text{ 为 } \mathbf{L} + \mathbf{H}_0 \text{ 的特征根, } i=1, \dots, N\}$;

(ii) $\mathbf{F} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}$, 其中 \mathbf{S} 是矩阵Riccati的代数方程

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} = 0 \quad (4)$$

的唯一半正定对称解阵, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 均是给定的正定矩阵.

那么, 系统(1)在控制协议(3)作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

证明: 记 $\mathbf{X}(t) = (\mathbf{x}_1^T(t), \dots, \mathbf{x}_N^T(t))^T \in \mathbb{R}^{nN}$, $\mathbf{X}_0(t) = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{x}_0(t)$. 将控制协议(3)代入系统(1), 可得闭环系统:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \mathbf{X}(t) - \rho [(\mathbf{L} + \mathbf{H}_0) \otimes \mathbf{B} \mathbf{F}] \mathbf{X}(t) + \rho (\mathbf{H}_0 \mathbf{R}_0 \otimes \mathbf{B} \mathbf{F}) \mathbf{X}_0(t). \quad (5)$$

由(U₃)-(U₄)及引理1可知, 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_Y = \text{diag}(p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1N})$, 使得 $\mathbf{P}_Y^{-1} \mathbf{L} \mathbf{P}_Y = \bar{\mathbf{L}}_s = (\bar{l}_{s,ij})$, 其中 $\bar{l}_{s,ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij}$, $\bar{l}_{s,ij} = -h_{ij}, i, j=0, 1, \dots, N$, 即

$$\text{diag}(p_{10}^{-1}, p_{11}^{-1}, p_{12}^{-1}, \dots, p_{1N}^{-1}) \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H}_0 \mathbf{R}_0 \mathbf{1}_N & \mathbf{L} + \mathbf{H}_0 \end{pmatrix} \times \text{diag}(p_{10}, p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1N}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H}_0 \mathbf{1}_N & \mathbf{L}_s + \mathbf{H}_0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

式中, $\mathbf{L}_s = (l_{s,ij})$, $l_{s,ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij}$, $l_{s,ij} = -h_{ij}, i, j=1, \dots, N$, 由此可知 $\mathbf{L}_s \mathbf{1}_N = \mathbf{0}$, 并且当 $(j,i) \in \bar{\mathcal{E}}$ 时, $p_{1i}^{-1} r_{ij} p_{1j} = 1, i, j=0, 1, \dots, N$. 记 $\Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_N(t))^T \in \mathbb{R}^{nN}$, 其中 $\Delta_i(t) = p_{10} p_{1i}^{-1} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t), i=1, \dots, N$. 注意到 $p_{10} \text{diag}(p_{11}^{-1}, p_{12}^{-1}, \dots, p_{1N}^{-1}) \mathbf{H}_0 \mathbf{R}_0 = \mathbf{H}_0$. 结合式(5)得

$$\dot{\Delta}(t) = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \rho (\mathbf{L}_s + \mathbf{H}_0) \otimes \mathbf{B} \mathbf{F}] \Delta(t). \quad (7)$$

由式(6)可知, $\bar{\mathcal{G}}$ 的Laplacian矩阵 $\bar{\mathbf{L}}$ 与 $\bar{\mathbf{L}}_s$ 有相同的特征根. 由(U₄)及引理2可知, $\bar{\mathbf{L}}_s$ 有且仅有一个零根并且其余特征根都在右半开平面内. 进而由式(6)可知 $\mathbf{L}_s + \mathbf{H}_0$ 的特征根全在右半开平面内. 设 $\lambda_i, i=1, \dots, N$ 为 $\mathbf{L}_s + \mathbf{H}_0$ 的全部特征根, 则 $\text{Re}(\lambda_i) > 0, i=1, \dots, N$. 由条件(i)可知 $\rho \geq \frac{1}{2 \min_{i \in \Omega} \text{Re}(\lambda_i)}$, 进而 $2\rho \text{Re}(\lambda_i) - 1 \geq 0, \forall i=1, \dots, N$.

下面证明 $\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{F}, i=1, \dots, N$ 的特征根都具有负实部. 事实上, 用反证法. 假设对某个*i*, 矩阵 $\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{F}$ 有特征根 μ , 具有非负实部, 即 $\text{Re}(\mu) \geq 0$. 设 \mathbf{v} 为 μ 对应的特征向量, 则 $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, 并且 $(\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{F}) \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}$. 由条件(ii)可知:

$$\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{F} = \mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}, \forall i=1, \dots, N.$$

注意到:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F})^* \mathbf{S} + \mathbf{S} (\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F}) \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} - 2\rho \text{Re}(\lambda_i) \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \\ &= -\mathbf{E} - [2\rho \text{Re}(\lambda_i) - 1] \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}, \end{aligned}$$

或等价地,

$$\begin{aligned} & (\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F})^* \mathbf{S} + \mathbf{S} (\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F}) + \mathbf{E} \\ &+ [2\rho \text{Re}(\lambda_i) - 1] \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} = 0, \end{aligned}$$

式中, *表示共轭转置. 对上式两端同时左乘 \mathbf{v}^* , 右乘 \mathbf{v} , 得

$$\begin{aligned} & \mathbf{v}^* (\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F})^* \mathbf{S} \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{S} (\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F}) \mathbf{v} + \mathbf{v}^* \mathbf{E} \mathbf{v} \\ &+ [2\rho \text{Re}(\lambda_i) - 1] \mathbf{v}^* \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

注意到 $(\mathbf{A} - \lambda_i \rho \mathbf{B} \mathbf{F}) \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}$. 则 $2\text{Re}(\mu) \mathbf{v}^* \mathbf{S} \mathbf{v} +$

$\mathbf{v}^* \mathbf{E} \mathbf{v} + [2\rho \operatorname{Re}(\lambda_i) - 1] \mathbf{v}^* \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{v} = 0$. 由于 $\operatorname{Re}(\mu) \geq 0$, $2\rho \operatorname{Re}(\lambda_i) - 1 \geq 0$, 并且 \mathbf{S} 是半正定的, 所以上式左端三项全部为非负的, 故必全为零. 但第二项 $\mathbf{v}^* \mathbf{E} \mathbf{v} = 0$, 与 \mathbf{E} 为正定矩阵矛盾. 这说明假设不成立. 因此矩阵 $\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{F}$ 的特征根均具有负实部. 进而, 系统(7)是渐近稳定的. 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = 0$. 由 $\Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_N(t))^T$ 知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (p_{10} p_{1i}^{-1} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

或等价地

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_i(t) - p_{10}^{-1} p_{1i} \mathbf{x}_0(t)) = 0, \quad i = 1, \dots, N.$$

取 $\alpha_i = p_{10}^{-1} p_{1i}$, $i = 1, \dots, N$. 由引理1知 $p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1N}$ 是由多运动体系统的通信关系所确定的. 根据定义1可知, 系统(1)在协议(3)作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

注3 如果 (U_1) 成立, 即 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 是能稳的, 那么由文献[30]知对任意给定的正定矩阵 \mathbf{E} 和 \mathbf{W} , 矩阵Riccati代数方程(4)一定存在唯一的半正定解 \mathbf{S} . 因此, 在定理1的条件(ii)中增益矩阵 $\mathbf{F} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S}$ 的选取是可行的. 实际上, 为简单起见, 可以给定 $\mathbf{E} = \mathbf{I}_n$, $\mathbf{W} = \mathbf{I}_p$, 从而取增益矩阵 $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \mathbf{S}$, 其中 \mathbf{S} 是 $\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{I}_n - \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{S} = 0$ 的半正定解.

注4 (U_3) - (U_4) 是保证多运动体系统在所设计的控制协议下实现领导-跟随者群智汇集趋同的拓扑结构假设. 其中 (U_3) 是系统实现群智汇集趋同的一个充分条件^[26,28], (U_4) 是保证系统实现领导-跟随者趋同或者双向趋同的最弱拓扑条件^[8,9,31].

3.2 输出反馈型控制协议

注意到控制协议(3)的设计依赖于系统中跟随者的全局状态信息. 然而, 在实际应用中, 跟随者的状态作为系统的内部变量, 一般是不能全部直接量测的. 相反, 每个跟随者均可以获得自身相对于其邻居的相对输出信息. 这时, 利用跟随者的相对输出信息来设计控制协议将是更加可行的.

对于系统(1), 给出如下的输出反馈型控制协议:

$$\mathbf{u}_i(t) = \rho \mathbf{G} \left[\sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij} (r_{ij} \mathbf{y}_j(t) - \mathbf{y}_i(t)) + h_{i0} (r_{i0} \mathbf{y}_0(t) - \mathbf{y}_i(t)) \right], \quad (8)$$

式中, $\rho \in \mathbb{R}$ 是控制增益常数, $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 是控制增益矩

阵. 将控制协议(8)代入系统(1), 可得闭环系统:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t) &= (\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A}) \mathbf{X}(t) - \rho [(\mathbf{L} + \mathbf{H}_0) \otimes \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}] \mathbf{X}(t) \\ &\quad + \rho [(\mathbf{H}_0 \mathbf{R}_0) \otimes \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}] \mathbf{X}_0(t). \end{aligned} \quad (9)$$

如果 (U_3) - (U_4) 成立, 由引理1可知, 存在可逆矩阵 $\mathbf{P}_Y = \operatorname{diag}(p_{10}, p_{11}, \dots, p_{1N})$, 使得 $\mathbf{P}_Y^{-1} \mathbf{L} \mathbf{P}_Y = \bar{\mathbf{L}}_s = (\bar{l}_{s,ij})$, 其中 $\bar{l}_{s,ii} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} h_{ij}$, $\bar{l}_{s,ij} = -h_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots, N$.

为简单起见, 继续采用3.1节中的记号 $\Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_N(t))^T \in \mathbb{R}^{nN}$, 其中 $\Delta_i(t) = p_{10} p_{1i}^{-1} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)$, $i = 1, \dots, N$. 则由式(6)和(9)得

$$\dot{\Delta}(t) = [\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{A} - \rho (\mathbf{L}_s + \mathbf{H}_0) \otimes \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}] \Delta(t). \quad (10)$$

系统(10)的渐近稳定性等价于 $\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}$ 的特征根均具有负实部, 其中 λ_i , $i = 1, \dots, N$ 为 $\mathbf{L}_s + \mathbf{H}_0$ 的特征根. 因此, 我们有下面的结论.

定理2 对于系统(1), 如果 (U_3) - (U_4) 成立, 并且 $\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}$, $i = 1, \dots, N$ 的特征根均具有负实部, 则系统(1)在控制协议(8)作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

由定理2可知, 通过引入误差 $\Delta(t)$, 系统(1)的领导-跟随者群智汇集趋同问题转化为是否存在增益常数 ρ 和增益矩阵 \mathbf{G} 使得 $\mathbf{A} - \rho \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{G} \mathbf{C}$, $i = 1, \dots, N$ 的特征根均具有负实部的问题. 这个问题实质上可以看作是一个静态输出反馈问题. 针对这个问题的研究在控制理论中有很长的历史, 但已有成果多为数值解, 其解析解多与Lyapunov不等式和代数Riccati不等式等关系密切^[32,33]. 下面我们将说明当系统(1)的输入输出矩阵满足一定秩条件时, 系统也可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

定理3 对于系统(1), 如果 (U_1) , (U_3) - (U_4) 成立, 并且下列条件满足:

- (i) $\rho \geq \frac{1}{2 \min_{i \in \Omega} \operatorname{Re}(\lambda_i)}$, 其中 $\Omega = \{i: \operatorname{Re}(\lambda_i) > 0, \lambda_i, i = 1, \dots, N \text{ 为 } \mathbf{L} + \mathbf{H}_0 \text{ 的特征根}\}$;
- (ii) \mathbf{S} 是矩阵Riccati代数方程 $\mathbf{A}^T \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{S} \mathbf{B} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} = 0$ 的唯一半正定对称解阵, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T \in \mathbb{R}^{p \times p}$ 均是给定的正定矩阵;
- (iii) 秩条件 $\operatorname{rank}(\mathbf{C}) = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{W}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \end{pmatrix}$.

那么系统(1)在控制协议(8)作用下可以实现领导-

跟随者群智汇集趋同.

证明: 由假设 (U_1) , (U_3) - (U_4) 及条件(i)~(ii)成立, 并结合定理1的证明过程可知 $\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{F}=\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}$, $i=1, \dots, N$ 的特征根均具有负实部. 由条件(iii)成立知矩阵方程 $\mathbf{X}\mathbf{C}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}$ 有解, 设其中一个解为 \mathbf{G}_0 , 则 $\mathbf{G}_0\mathbf{C}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}$. 因此, 我们选取控制增益矩阵 $\mathbf{G}=\mathbf{G}_0$, 则 $\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{C}=\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{G}_0\mathbf{C}=\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}$, 从而 $\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{C}$ 的特征根均具有负实部. 由定理2知结论成立.

注5 定理2和定理3分别给出了多运动体系统在加权的合作-竞争关系下借助输出反馈型控制协议实现领导-跟随者群智汇集趋同的充分条件.

类似地, 如果 (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 是能检测的, 那么 $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ 是能稳的. 进而对任意给定的正定矩阵 $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^T \in \mathbb{R}^{q \times q}$, 矩阵Riccati代数方程 $\mathbf{A}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}^T+\mathbf{Q}-\mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}=0$ 有唯一半正定对称解矩阵 \mathbf{P} , 并且 $\mathbf{A}^T-\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}$ 的特征根均具有负实部. 得到下列结论.

定理4 对于系统(1), 如果 (U_2) - (U_4) 成立, 并且满足下列条件:

- (i) $\rho \geq \frac{1}{2\min_{i \in \Omega} \text{Re}(\lambda_i)}$, 其中 $\Omega=\{i: \text{Re}(\lambda_i)>0, \lambda_i, i=1, \dots, N$ 为 $\mathbf{L}+\mathbf{H}_0$ 的特征根};
- (ii) \mathbf{P} 是矩阵Riccati代数方程 $\mathbf{A}\mathbf{P}+\mathbf{P}\mathbf{A}^T+\mathbf{Q}-\mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}=0$ 的唯一半正定对称解阵, $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R}=\mathbf{R}^T \in \mathbb{R}^{q \times q}$ 均是给定的正定矩阵;
- (iii) 秩条件 $\text{rank}(\mathbf{B})=\text{rank}(\mathbf{B} \ \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1})$.

那么系统(1)在控制协议(8)作用下可以实现领导-跟随者群智汇集趋同.

证明: 证明过程与定理3类似. 只需注意到 $\mathbf{A}^T-\rho\lambda_i\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{P}$ 与 $\mathbf{A}-\rho\lambda_i\mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{C}$, $i=1, \dots, N$ 有相同的特征根, 并且当 $\text{rank}(\mathbf{B})=\text{rank}(\mathbf{B} \ \mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1})$ 时, 矩阵方程 $\mathbf{B}\mathbf{X}=\mathbf{P}\mathbf{C}^T\mathbf{R}^{-1}$ 有解即可.

注6 由定理1~4的证明过程可知, 无论采用状态反馈型还是输出反馈型控制协议, 跟随者的分类簇都是由通讯拓扑的Laplacian矩阵所决定的. 控制协议中的增益常数与Laplacian矩阵之间的关系交织耦合, 目前还无法通过控制协议来调整跟随者的分类簇.

4 仿真实例

(1) 例1

考虑由一个领导者和四个跟随者所组成的多运动体系统. 跟随者的动力学满足式(1)($N=4$), 领导者标记为0, 其动力学满足式(2). 其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (2 \ 1),$$

显然 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 能稳, (\mathbf{A}, \mathbf{C}) 能检测. 即 (U_1) - (U_2) 成立. 运动体间的通信关系用加权符号图 $\mathcal{G}=(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{R}})$ 表示, 其中 $\bar{\mathcal{V}}=\{0, 1, 2, 3, 4\}$, $h_{10}=1, h_{13}=2, h_{21}=2, h_{32}=4, h_{40}=2; r_{10}=1, r_{13}=-0.5, r_{21}=-2, r_{32}=1, r_{40}=-1$. 如图1所示, \mathcal{G} 存在一棵生成树, 并且在由 \mathcal{G} 产生的加权符号图 $\bar{\mathcal{G}}=(\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{R}})$ 中, 两个有向循环的权重乘积都等于1, 即满足 $\bar{r}_{21}\bar{r}_{32}\bar{r}_{13}=r_{21}r_{32}r_{13}=1, \bar{r}_{12}\bar{r}_{31}\bar{r}_{23}=r_{21}^{-1}r_{13}^{-1}r_{32}^{-1}=1$. 由定义知 $\bar{\mathcal{G}}$ 是交互平衡的. 进而, (U_3) - (U_4) 成立.

由Laplacian矩阵的定义可知

$$\mathbf{L}+\mathbf{H}_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

直接计算可得 $\mathbf{L}+\mathbf{H}_0$ 的特征根为 $\lambda_1=0.3480, \lambda_2=4.3260+2.0676i, \lambda_3=4.3260-2.0676i, \lambda_4=2$ ($i^2=-1$). 因此, $\frac{1}{2\min_{1 \leq i \leq 4} \text{Re}(\lambda_i)}=1.4368$, 所以, 在控制协议(3)中选取增益常数 $\rho=2 \geq 1.4368$. 进而定理1中的条件(i)成立. 在矩阵Riccati代数方程(4)中令 $\mathbf{E}=\mathbf{I}_2, \mathbf{W}=1$, 则方程有唯一正定解;

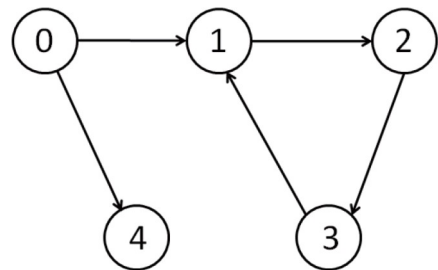


图1 通信拓扑 $\bar{\mathcal{G}}$
Figure 1 Communication topology $\bar{\mathcal{G}}$.

$$S = \begin{pmatrix} 1.4222 & 0.3090 \\ 0.3090 & 0.6360 \end{pmatrix}.$$

根据定理1中条件(ii), 选取增益矩阵 $F = W^{-1}B^T S = (0.6180 \ 1.2720)$. 注意到 \mathcal{G} 的Laplacian矩阵 L 满足

$$\begin{aligned} & \text{diag}(1 \ 1 \ -0.5 \ -0.5 \ -1) L \text{diag}(1 \ 1 \ -2 \ -2 \ -1) \\ & = \bar{L}_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

因而, 选取 $p_{10}=1, p_{11}=1, p_{12}=-2, p_{13}=-2, p_{14}=-1$, 根据定理1可知

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_i(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (p_{10} p_{1i}^{-1} \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_0(t)) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

取 $\alpha_i = p_{10}^{-1} p_{1i}, i = 1, 2, 3, 4$, 则 $\alpha_1=1, \alpha_2=\alpha_3=-2, \alpha_4=-1$. 即领导者0与跟随者1处于同一个簇, 跟随者2和3处于同一个簇, 跟随者4单独在一个簇. 选取初值为 $\mathbf{x}_1^T(0) = (-1 \ -0.5)^T, \mathbf{x}_2^T(0) = (1 \ -2)^T, \mathbf{x}_3^T(0) = (0 \ 1)^T, \mathbf{x}_4^T(0) = (0.8 \ 1.5)^T, \mathbf{x}_0(0) = (0.5 \ 2)^T$, 应用控制协议(3), 得到领导者和跟随者的状态轨迹和误差轨迹分别如图2和图3所示. 我们发现, 随着时间的推移, 多运动体系统分成3个簇, 即领导者0与跟随者1; 跟随者2和3; 跟随者4. 这说明系统在所设计的状态反馈型控制协议(3)作用下实现了领导-跟随者群智汇集趋同. 这与定理1的结论一致.

(2) 例2

本例也考虑由一个领导者和四个跟随者所组成的多运动体系统. 跟随者的动力学和领导者的动力学分别满足式(1)($N=4$)和式(2), 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (2 \ 0).$$

显然 (A, B) 是能稳的, (A, C) 是能检测的, 即 $(U_1)-(U_2)$ 成立. 领导者和跟随者之间的通信关系继续采用例1中的加权符号图 $\mathcal{G} = (\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{\mathcal{R}})$ 表示, 因而 \mathcal{G} 是交互平衡的, 并且存在一棵生成树, 即 $(U_3)-(U_4)$ 成立. 由于此处多运动体系统的通信关系与例1相同, 所以在控制协议(8)中同样选取增益常数 $\rho=2$. 令 $E=I_2, W=1$, 则矩阵Riccati代数方程(4)有唯一正定解 $S=I_2$. 因而

$$\begin{aligned} \text{rank}(C) &= \text{rank}(2 \ 0) = 1 = \text{rank} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ W^{-1}B^T S \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

即定理3中的秩条件满足. 解矩阵方程 $XC = W^{-1}B^T S$ 可得解矩阵 $G_0=0.5$. 在控制协议(8)中取增益矩阵 $G=G_0=0.5$. 设领导者的初始条件为 $\mathbf{x}_0(0)=(1.5 \ -1)^T$. 跟随者的初始条件为 $\mathbf{X}(0)=(-1 \ 2 \ 0 \ -1.2 \ 1 \ 0.8 \ -2 \ 0.5)^T$. 将控制协议(8)作用于跟随者系统(1), 得到领导者和跟随者的状态轨迹和误差轨迹分别如图4和图5所示. 我们发现领导者0与跟随者1的状态一致; 跟随者2和3的状态一致; 跟随者4自成一簇. 这说明在输出反馈型控制协议(8)作用下, 系统也实现了领导-跟随者群智汇集趋同. 这与定理3的结论一致.

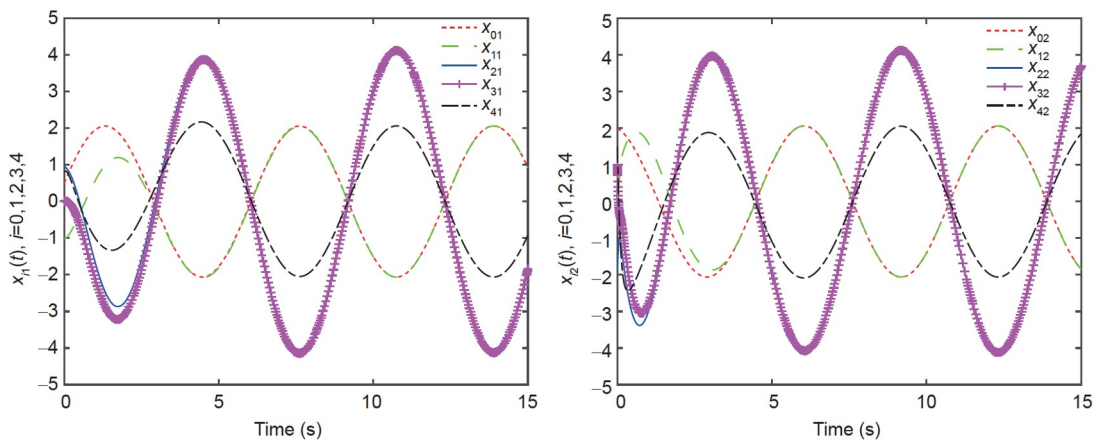


图2 状态反馈控制作用下领导者与跟随者的状态轨迹
Figure 2 State trajectories of the leader and four followers based on state feedback control.

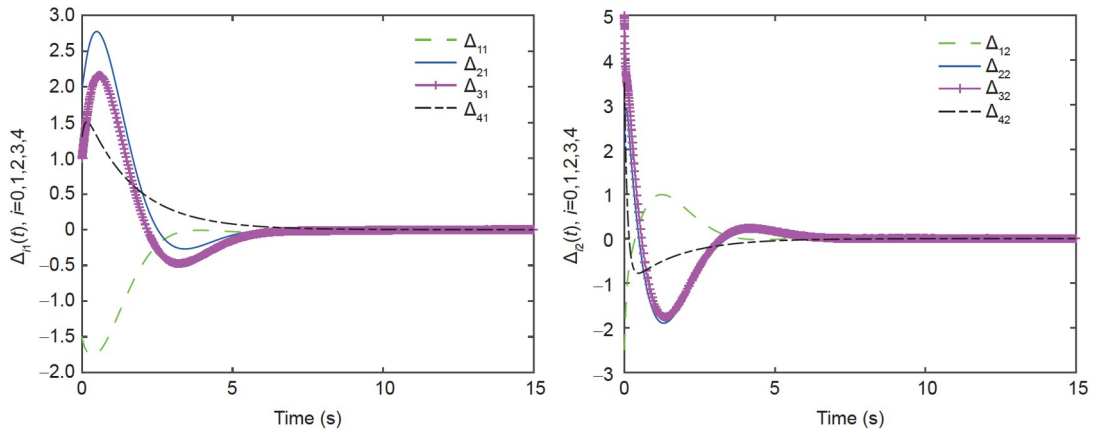


图 3 状态反馈控制作用下领导者与跟随者的误差轨迹

Figure 3 Error trajectories of the leader and four followers based on state feedback control.

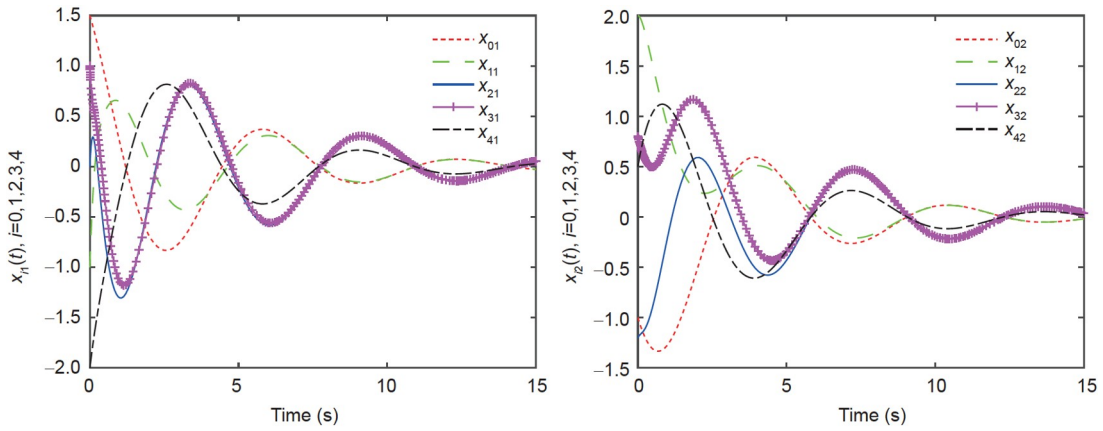


图 4 输出反馈控制作用下领导者与跟随者的状态轨迹

Figure 4 State trajectories of the leader and four followers based on output feedback control.

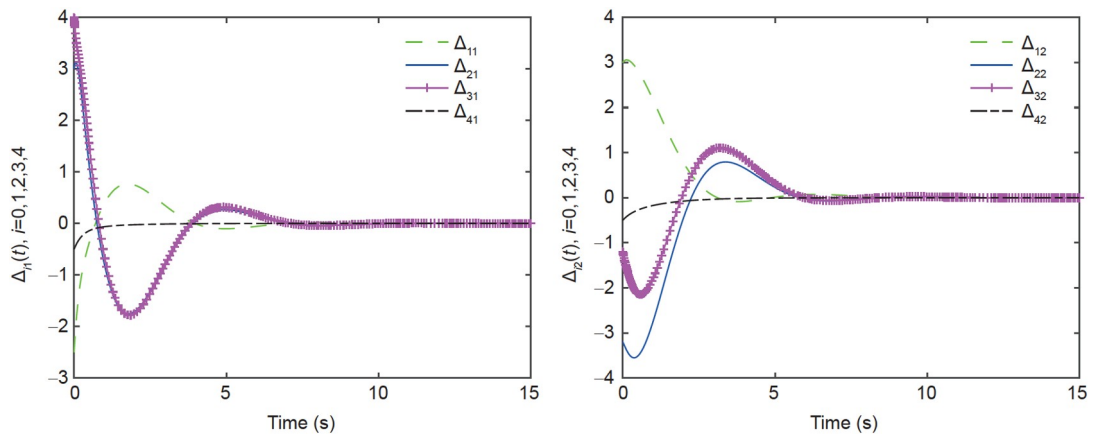


图 5 输出反馈控制作用下领导者与跟随者的误差轨迹

Figure 5 Error trajectories of the leader and four followers based on output feedback control.

5 总结

本文主要考虑具有领导者的高阶线性多运动体系统的群智汇集趋同问题, 用加权符号图表征由跟随者和领导者所组成的多运动体系统的通信关系. 基于运动体及其邻居的信息, 为每个跟随者设计了状态反馈

型和输出反馈型控制协议, 证明了如果领导者和跟随者所组成的多运动体系统的通信拓扑存在一棵生成树, 并且是交互平衡的, 那么通过选取满足一定条件的增益常数和增益矩阵, 系统在所设计的控制协议作用下能够实现领导-跟随者群智汇集趋同.

参考文献

- Duan H B, Qiu H X, Fan Y M. Unmanned aerial vehicle close formation cooperative control based on predatory escaping pigeon-inspired optimization (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2015, 45: 559–572 [段海滨, 邱华鑫, 范彦铭. 基于捕食逃逸鸽群优化的无人机紧密编队协同控制. 中国科学: 技术科学, 2015, 45: 559–572]
- Dong Q, Liang Y Q, Zhao Y J. UAV swarm formation control based on adaptive finite-time observer disturbance (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 423–438 [董琦, 梁月乾, 赵彦杰. 基于自适应有限时间干扰观测器的无人机集群编队控制方法. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 423–438]
- Gao L, Lu L P, Chu D F, et al. Multi-lane convoy control based on graph and potential field (in Chinese). *Acta Automat Sin*, 2020, 46: 117–126 [高力, 陆丽萍, 褚端峰, 等. 基于图与势场法的多车道编队控制. 自动化学报, 2020, 46: 117–126]
- Cortés J, Bullo F. Coordination and geometric optimization via distributed dynamical systems. *SIAM J Control Optim*, 2003, 44: 1543–1574
- Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays. *IEEE Trans Automat Contr*, 2004, 49: 1520–1533
- Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. *IEEE Trans Automat Contr*, 2005, 50: 655–661
- Li T, Zhang J F. Sampled-data based average consensus with measurement noises: Convergence analysis and uncertainty principle. *Sci China Ser F-Inf Sci*, 2009, 52: 2089–2103
- Ma C Q, Zhang J F. Necessary and sufficient conditions for consensusability of linear multi-agent systems. *IEEE Trans Automat Contr*, 2010, 55: 1263–1268
- Ma C, Li T, Zhang J. Consensus control for leader-following multi-agent systems with measurement noises. *J Syst Sci Complex*, 2010, 23: 35–49
- Li Z K, Duan Z S, Chen G R, et al. Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint. *IEEE Trans Circuits Syst I*, 2010, 57: 213–224
- Ma C, Zhang J. On formability of linear continuous-time multi-agent systems. *J Syst Sci Complex*, 2012, 25: 13–29
- Wang B C, Zhang J F. Mean field games for large-population multiagent systems with Markov jump parameters. *SIAM J Control Optim*, 2012, 50: 2308–2334
- Ware A. *The Dynamics of Two-Party Politics: Party Structures and the Management of Competition*. London: Oxford University Press, 2009
- Easley D, Kleinberg J. *Networks, Crowds, and Markets. Reasoning About a Highly Connected World*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2010
- Dolby A S, Grubb Jr T C. Benefits to satellite members in mixed-species foraging groups: An experimental analysis. *Anim Behaviour*, 1998, 56: 501–509
- Prorok A, Hsieh M A, Kumar V. The impact of diversity on optimal control policies for heterogeneous robot swarms. *IEEE Trans Automat Contr*, 2017, 33: 346–358
- Huo M Z, Wei C, Yu Y P, et al. Clustering optimization algorithm for large-scale unmanned aerial vehicle based on intelligent behavior of pigeons (in Chinese). *Sci Sin Tech*, 2020, 50: 475–482 [霍梦真, 魏晨, 于月平, 等. 基于鸽群智能行为的大规模无人机集群聚类优化算法. 中国科学: 技术科学, 2020, 50: 475–482]
- Couzin I D, Krause J, Franks N R, et al. Effective leadership and decision-making in animal groups on the move. *Nature*, 2005, 433: 513–516
- Yu J, Wang L. Group consensus in multi-agent systems with switching topologies and communication delays. *Syst Control Lett*, 2010, 59: 340–348
- Qin J, Yu C. Cluster consensus control of generic linear multi-agent systems under directed topology with acyclic partition. *Automatica*, 2013, 49:

2898–2905

- 21 Liu X, Chen T. Finite-time and fixed-time cluster synchronization with or without pinning control. *IEEE Trans Cybern*, 2018, 48: 240–252
- 22 Ma Q, Wang Z, Miao G. Second-order group consensus for multi-agent systems via pinning leader-following approach. *J Franklin Institute*, 2014, 351: 1288–1300
- 23 Xie D, Shi L, Jiang F. Group tracking control of second-order multi-agent systems with fixed and Markovian switching topologies. *Neurocomputing*, 2018, 281: 37–46
- 24 Qin J, Yu C, Anderson B D O. On leaderless and leader-following consensus for interacting clusters of second-order multi-agent systems. *Automatica*, 2016, 74: 214–221
- 25 Qin J, Fu W, Shi Y, et al. Leader-following practical cluster synchronization for networks of generic linear systems: An event-based approach. *IEEE Trans Neural Netw Learn Syst*, 2019, 30: 215–224
- 26 Zhan J, Li X. Cluster consensus in networks of agents with weighted cooperative-competitive interactions. *IEEE Trans Circuits Syst II*, 2018, 65: 241–245
- 27 Zhao M, Peng C, Han Q L, et al. Cluster consensus of multiagent systems with weighted antagonistic interactions. *IEEE Trans Cybern*, 2021, 51: 5609–5618
- 28 Ma C Q, Liu T Y, Zhao Y B. Cluster consensus for coupled harmonic oscillators under a weighted cooperative-competitive network. *Int J Control*, 2021, 1–9
- 29 Zhou M, Zhan J Y, Li X. Cluster consensus of high-order multi-agent systems in weighted cooperative networks. In: Proceedings of the 35th Chinese Control Conference. Chengdu, 2016. 7739–7744
- 30 Cheng Z L, Ma S P. Linear System Theory (in Chinese). Beijing: Science Press, 2006 [程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, 2006]
- 31 Ma C Q, Xie L. Necessary and sufficient conditions for leader-following bipartite consensus with measurement noise. *IEEE Trans Syst Man Cybern Syst*, 2020, 50: 1976–1981
- 32 Syrmos V L, Abdallah C, Dorato P. Static output feedback: A survey. In: Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, FL, December, 1994. 837–842
- 33 Lewis F L, Vrabie D, Syrmos V L. Optimal Control. 3rd ed. New York: Wiley, 2012

Cluster consensus for leader-following high-order linear multiagent systems

MA CuiQin¹, DU Mei¹ & ZHAO YunBo²

¹ School of Mathematical Sciences, Qufu Normal University, Qufu 273165, China;

² Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Cluster consensus for leader-following high-order linear multiagent systems (MASs) is investigated. Based on the information of an agent and its neighbors, state feedback and output feedback control protocols are designed for each follower, respectively. Sufficient conditions for leader-following cluster consensus are given using tools from the algebraic Riccati equation and matrix analysis. It is shown that if the communication topology of an MAS composed of the leader and followers is interactively balanced and contains a spanning tree, the MAS can achieve leader-following cluster consensus under the proposed control protocols by properly selecting control gains. Particularly, it is found that the leader-following cluster consensus problem based on the output feedback protocol can be transformed into a static output feedback problem using an error system. If the input and output matrices of a follower satisfy a certain rank condition, the MAS can achieve leader-following cluster consensus under the designed output feedback control protocol.

multiagent systems, cluster consensus, leader-following, weighted signed graph

doi: [10.1360/SST-2021-0375](https://doi.org/10.1360/SST-2021-0375)