

## 基于丢包率估计的无线网络化控制系统的逼近控制策略<sup>①</sup>

吴芳<sup>②</sup> 梁启鹏 叶睿卿 赵云波<sup>③</sup>

(浙江工业大学信息工程学院 杭州 310023)

**摘要** 本文针对丢包为分段伯努利过程的无线网络化控制系统进行了控制器设计和稳定性分析。丢包满足分段伯努利过程是指未知丢包率将在未知时刻突变到另一个未知概率上并保持一段时间。针对这一丢包特点,本文提出了基于丢包率估计的逼近控制策略以保证系统稳定性。首先设计了丢包率估计器和逼近控制器,使系统在线估计丢包率,并利用丢包率估计得到控制量。然后为平衡系统性能和网络信道资源设计了信道调度机制。最后设计了丢包率突变检测器使系统自适应丢包率突变。在此基础上得到了保证闭环系统均方最终一致有界的充分条件和控制增益计算方法。数值仿真验证了控制策略的有效性。

**关键词** 无线网络化控制;丢包率估计;分段伯努利过程;逼近控制器

### 0 引言

无线网络化控制系统是一类利用无线网络实现传感器、控制器以及执行器之间数据传输的网络化控制系统。得益于其组网灵活、易于维护的优点<sup>[1-2]</sup>,以及近年来智能传感器、嵌入式计算以及无线网络技术的发展,无线网络化控制系统在例如车联网<sup>[3-4]</sup>、工业控制<sup>[5]</sup>、智能建筑<sup>[6]</sup>、无人车辆控制<sup>[7]</sup>等领域得到了广泛的应用。

相较于传统网络化控制系统,无线网络化控制系统中的丢包率具有一种独特的分段常值特点,即丢包率在未知一个常数上保持一段时间后,在未知时刻突变到另一个未知常数上,并保持一段时间。原因主要有以下两方面。首先,无线网络组网灵活意味着用户可较为容易地接入或离开网络,当用户接入或退出网络时,网络拓扑将发生变化,从而导致丢包率发生变化<sup>[8-9]</sup>,变化后的丢包率通常难以预知。其次,无线网络容易受到拒绝服务攻击等网络攻击,攻击造成的丢包可被建模为与网络随机丢包

独立的伯努利过程<sup>[10]</sup>,攻击使网络整体丢包率提高,使系统性能恶化。

分段常值的丢包率意味着突变时刻未知以及突变后的丢包率未知,这给无线网络化控制系统的设计带来了挑战。现有研究大多基于已知丢包率设计控制器<sup>[11-16]</sup>,对丢包率具有分段常值特性的无线网络化控制系统的研究较少。文献[17]针对丢包率存在有界不确定性的网络化控制系统,设计了状态反馈控制器。文献[18]针对丢包率和系统矩阵均未知的多包传输网络化控制系统,先利用增广最小二乘法估计丢包率,再利用丢包率估计值与卡尔曼滤波器结合,得到了自调节状态滤波器。文献[19]针对未知延时概率和丢包率的网络化控制系统做了研究,设计了自适应值函数估计器,结合 Q-learning 的思想,迭代更新控制策略,最终得到了保证系统随机渐进稳定的控制器。文献[20,21]中提出的基于确定性深度策略梯度算法的控制器,可以在未知连续丢包概率的情况下保证系统稳定性。其中文献[19-21]中方法均需要利用大量数据进行训练,且训练之初的系统性能无法保证,对无线网络化控制系统不适用。

① 科技创新 2030—“新一代人工智能”重大项目(2018AAA0100800)和安徽省重点研发计划(202104a05020064)资助项目。

② 女,1997年生,硕士生;研究方向:网络化控制;E-mail:1449817268@qq.com。

③ 通信作者, E-mail: ybzhao@ustc.edu.cn。

(收稿日期:2021-07-22)

本文针对丢包率具有分段常值特性的无线网络化控制系统,提出了基于丢包率估计的逼近控制(estimation based approximating control, EBAC)策略,使无线网络化控制系统自适应丢包率的变化。控制策略由丢包率突变检测器、丢包率估计器、逼近控制器和信道选择机制 4 个部分组成。丢包率突变检测器用于检测丢包率的突变时刻。丢包率估计器利用数据包时间戳在线估计丢包率,逼近控制器利用丢包率估计得到控制量。传感器和控制器通过信道选择机制选择合适信道传输数据,用于平衡系统性能和网络信道资源。本文得到了 EBAC 策略下保证闭环系统均方最终一致有界的充分条件,并得到了相应的控制增益计算方法,最后通过数值仿真说明了所提出方法的有效性。

本文组织如下,第 1 节描述研究问题,第 2 节详细说明了 EBAC 策略,第 3 节给出了闭环系统均方最终一致有界的充分条件,第 4 节通过仿真验证了 EBAC 策略的有效性,第 5 节总结全文。

## 1 问题描述

本文考虑的无线网络化控制系统如图 1 所示。被控对象用式(1)有扰的线性离散系统描述。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + C\omega(k) \quad (1)$$

其中,  $x \in \mathbb{R}^n$ 、 $u \in \mathbb{R}^m$ 、 $\omega \sim N(0, \sigma^2)$  分别为系统状态、控制输入以及系统扰动,扰动服从均值为 0、方差为  $\sigma^2$  的高斯分布。 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 、 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 、 $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  为系统矩阵。

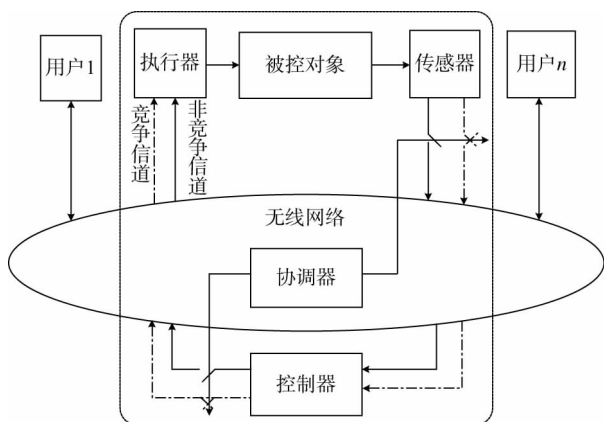


图 1 无线网络化控制系统控制框图

图 1 中的无线网络与其他用户共享,传感器、控制器、执行器是时间同步的。无线网络包含竞争信道和非竞争信道,可以通过协调器进行信道调度,选择合适的信道进行数据传输。例如 IEEE 802.15.4 协议中包括竞争访问阶段和非竞争访问阶段,设备向协调器申请非竞争访问阶段,由协调器分配非竞争阶段时隙。使用非竞争信道时,可以认为无丢包发生。

由于无线网络规模较小,延时对系统的影响可以忽略<sup>[22]</sup>,所以本文仅考虑具有丢包的无线网络化控制系统。状态量、控制量是否成功传输分别用随机变量  $\theta_k^{sc}$  和  $\theta_k^{ca}$  表示,即

$$\theta_k^{sc} = \begin{cases} 1 & x(k) \text{ 传输成功} \\ 0 & x(k) \text{ 传输失败} \end{cases}$$

$$\theta_k^{ca} = \begin{cases} 1 & u(k) \text{ 传输成功} \\ 0 & u(k) \text{ 传输失败} \end{cases}$$

在  $k$  时刻,执行器是否收到来自传感器的数据包用  $\theta_k$  表示,  $\theta_k = \theta_k^{sc} \wedge \theta_k^{ca}$ 。

当无线网络中用户接入和退出网络或网络受到攻击时,丢包概率将从一个未知常值突变到另一个未知常值上。由于用户变化、网络攻击等通常不会频繁发生,所以丢包概率突变后将维持一段较长的时间。另外,因为传感器到控制器以及控制器到执行器的信号通过同一无线网络传输,2 个通道的丢包概率可以认为是相同的<sup>[23]</sup>。上述对无线网络的说明可以总结为假设 1。

**假设 1**  $\theta_k^{sc}$  和  $\theta_k^{ca}$  可以建模为相同的分段伯努利过程,即对  $\forall i \in \mathbb{N}$

$$Pr(\theta_k^{sc} = 0) = Pr(\theta_k^{ca} = 0) = p_i \quad t_i \leq k \leq t_{i+1}$$

$$p_i \neq p_{i+1} \quad (2)$$

其中,  $p_i$  表示  $[t_i, t_{i+1})$  时间内的丢包率,  $t_i$  为丢包率发生第  $i$  次突变的时刻,  $t_i$  和  $p_i$  的取值未知。

由假设 1 可知,  $\theta_k$  满足如下分段伯努利过程。

$$Pr(\theta_k = 0) = 1 - (1 - p_i)^2 = \rho_i \quad t_i \leq k \leq t_{i+1} \quad (3)$$

本文目标是在假设 1 的丢包情况下,为图 1 所示的无线网络化控制系统设计合适的控制策略使其稳定。难点在于  $t_i$  和  $p_i$  未知,这使本文区别于大多数已有研究。

## 2 EBAC 策略设计

本节针对具有假设 1 丢包特性的无线网络化控制系统设计了 EBAC 策略,策略的主要思想如下。(1)为应对未知的丢包率,通过越来越精确的丢包率估计更新控制器,使之逐步逼近基于丢包真值的控制器。(2)为应对丢包率突变,设置丢包率突变检测器,当检测到丢包率突变后,重置(1)中循环。(3)为保证系统性能,同时兼顾网络信道资源, $x(k)$ 和  $u(k)$ 将选择合适信道传输。根据上述思想,设计了丢包率估计器、逼近控制器、丢包率突变检测器和信道选择机制 4 个部分,控制框图如图 2 所示。接下来将对这 4 个部分做详细说明。

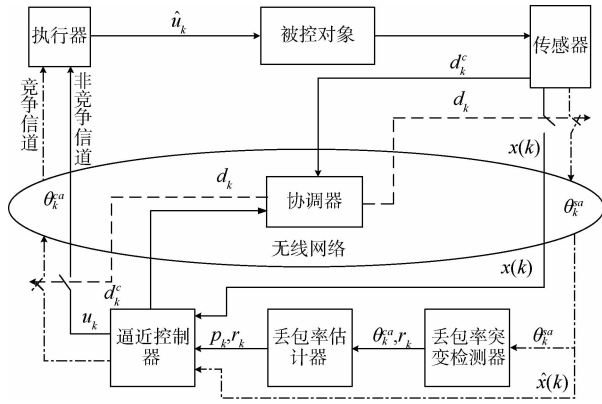


图 2 EBAC 策略控制流程图

对每个时间段  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , 控制策略将重新开始,所以在以下 EBAC 策略设计中省略了下标  $i$ 。

### 2.1 丢包率估计器设计

丢包率估计器在时刻  $k$ , 通过时间戳得到  $\theta_k^{sc}$ , 从而得到  $\rho$  的置信度不小于  $\alpha$  的估计区间  $P_k := [\underline{\rho}_k, \bar{\rho}_k]$ , 即  $Pr(\rho \in P_k) \geq \alpha$ 。

在估计开始时,采集的样本较少,得到的  $P_k$  置信度较低,故引入参数  $\mu$  ( $0 \leq \mu \leq 1$ ),降低估计开始阶段估计区间从  $[0, 1]$  收敛于  $\rho$  的速度,从而提高了  $P_k$  的置信度。 $P_k$  的计算方法为

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_k &= \mu^k + (1 - \mu^k)(1 - (1 - \bar{\rho}_k)^2) \\ \underline{\rho}_k &= (1 - \mu^k)(1 - (1 - \underline{\rho}_k)^2) \end{aligned} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{p}_k &= \beta\left(\frac{1 - \alpha}{2}; k - X_k, X_k + a\right) \\ \underline{p}_k &= \beta\left(\frac{1 + \alpha}{2}; k - X_k, X_k + b\right) \end{aligned} \quad (5)$$

$$X_k = \begin{cases} X_{k-1} + 1 & \theta_k^{sc} = 0 \\ X_{k-1} & \theta_k^{sc} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$\beta(c; d, e)$  是参数为  $d, e$  的贝塔分布的上侧  $c$  分位点,  $a, b$  为贝塔分布参数的初始值,通常可取  $0.5^{[24]}$ 。区间的收敛性可参考文献[24]。

### 2.2 逼近控制器设计

设计如下状态反馈控制器:

$$u_k = K(P_k) \hat{x}(k) \quad (7)$$

其中  $\hat{x}(k) = \theta_k^{sc} x(k) + (1 - \theta_k^{sc}) \hat{x}(k - 1)$ ,  $K(P_k)$  为利用  $P_k$  得到的控制增益。

值得注意的是,控制器无法在每一个时间步都更新,首先频繁切换的控制器将难以保证系统稳定性,其次频繁的切换将带来不必要的计算开销。因此,本文提出了如下控制器更新判断条件。

不妨设在  $k$  时刻之前,控制器已更新  $j$  次:

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & x^T(k)x(k) \leq \underline{H}, k - k_j \geq M, |\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $\delta_k = 1$  表示在时刻  $k$  更新控制增益。 $M \geq 0$ ,  $\varepsilon \geq 0$ ,  $\underline{H} \geq 0$  为给定阈值,  $k_j$  为第  $j$  次控制器更新的时刻。

由式(8)可知,实际用于控制增益计算的估计区间如式(9)所示。

$$\tilde{P}_k = \begin{cases} \bar{P}_{k-1} & \delta_k = 0 \\ P_k & \delta_k = 1 \end{cases} \quad (9)$$

则状态反馈控制器式(7)可重写为

$$u_k = K(\tilde{P}_k) \hat{x}(k) \quad (10)$$

其中  $K(\tilde{P}_k)$  的计算方法将在第 3 节中做详细说明。

**注 1** 在条件式(8)中,  $|\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k| \geq \varepsilon$  说明控制增益仅在估计区间  $P_k$  未收敛时更新。 $k - k_j \geq M$  保证控制增益至少在  $M$  步内保持不变。以上 2 个条件能减少控制增益不必要的更新。 $x^T(k)x(k) \leq \underline{H}$  说明仅当状态小于给定阈值时更新控制增益,此条件用于保证系统稳定性,证明将在第 3 节中给出。

### 2.3 信道调度机制设计

为保证系统性能的同时兼顾信道资源,对系统性能影响较大数据通过非竞争信道传输,其余数据通过竞争信道传输。

以下两类数据对系统性能影响较大,即超过给定上界的系统状态  $\{x(k) | x^T(k)x(k) \geq \bar{H}\}$  和控制增益更新时刻状态  $\{x(k) | \delta_k = 1\}$ 。所以设计了如式(11)所示的信道调度方法。

$$d_k = \begin{cases} 1 & d_k^c d_{k-1}^c = 2 \text{ 或 } d_k^s = 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$d_k^c = \begin{cases} 1 & k - k_j \geq M, |\bar{\rho}_k - \rho_k| \geq \varepsilon \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (12)$$

$$d_k^s = \begin{cases} 1 & x^T(k)x(k) \geq \bar{H} \text{ 或 } x^T(k)x(k) \geq \underline{H}, d_{k-1}^s = 1 \\ 2 & x^T(k)x(k) \leq \underline{H} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (13)$$

其中,  $\bar{H}$  为给定阈值,  $\bar{H} > \underline{H}$ 。当  $d_k = 1$  时,网络协调器使  $k$  时刻的数据通过非竞争信道传输。否则通过竞争信道传输。 $d_k^c$ 、 $d_k^s$  和  $d_k$  分别由控制器、传感器和协调器得到。

**注 2** 在信道调度条件式(11)中,  $d_k^s = 1$  表示系统状态超过给定上界,此时系统有失稳的风险,所以使用非竞争信道传输,直到系统状态小于给定边界  $\{x | x^T x = \underline{H}\}$ 。这种情况发生在估计开始阶段,此时  $P_k$  的区间长度较大,可能无法得到使系统稳定的控制增益。 $d_k^c = 2, d_{k-1}^c = 1$ , 表示当需要更新控制器时,通过非竞争信道传输数据包,这将保证更新时刻系统状态  $[x^T(k+1), \hat{x}^T(k)]$  有界,继而保证系统稳定性,证明将在第 3 节中给出。

综上所述,控制器设计如式(14)所示。

$$u_k = \begin{cases} K(\tilde{P}_k)\hat{x}(k) & d_k = 0 \\ K_N x(k) & d_k = 1 \end{cases} \quad (14)$$

其中,  $K_N$  为无线网络化控制系统使用非竞争信道时的控制增益,可用随机最优控制方法<sup>[25]</sup>求解。

### 2.4 丢包率突变检测器设计

在时刻  $k$ , 估计收敛,即  $|\bar{\rho}_k - \rho_k| \leq \varepsilon$ , 丢包率突变检测器开始检测丢包率突变。检测方法如下,检测器采集最新的  $w + 1$  个数据包的传输情况,记为  $D_k$ 。

$$D_k := \{\theta_j^{\text{sc}} | j = k, k-1, \dots, k-w\}$$

利用卡方检验方法得到  $r_k$ 。

$$r_k = \begin{cases} 0 & Pr(\theta_k^{\text{sc}} = 0) = \hat{p}_k \\ 1 & Pr(\theta_k^{\text{sc}} = 0) \neq \hat{p}_k \end{cases} \quad (15)$$

其中  $\hat{p}_k$  为  $\frac{(\bar{p}_k + p_k)}{2}$ ,  $r_k = 1$  表示检测到丢包率突变。

卡方统计量为

$$\chi_k^2 = \frac{(f_{0,k} - w\hat{p}_k)^2}{w\hat{p}_k} + \frac{(f_{1,k} - w(1-\hat{p}_k))^2}{w(1-\hat{p}_k)} \quad (16)$$

其中,  $f_{0,k}$  和  $f_{1,k}$  分别为  $D_k$  中 0 和 1 的数量。卡方检验详细过程可以参考文献[26]。

上述 EBAC 策略可以总结为算法 1。

#### 算法 1 EBAC 策略

初始化:置  $\delta_0 = \bar{\rho}_0 = \underline{\rho}_0 = 1, \rho_0 = \underline{\rho}_0 = k = d_0 = r_0 = 0$ , 给定阈值  $\varepsilon \geq 0, 0 \leq \underline{H} \leq \bar{H}$ 。

1. 协调器通过式(11)选择  $k$  时刻的传输信道。
2. 如果  $|\bar{\rho}_k - \rho_k| \leq \varepsilon$ , 通过式(15)、(16)得到  $r_k$ , 否则  $r_k = 0$ 。
3. 如果  $r_k = 1$ , 转到初始化。否则转到步骤 4。
4. 丢包率估计器由式(4)、(5)、(6)得到  $P_k$ 。
5. 逼近控制器通过式(14)得到  $u_k$ , 并发送给执行器。
6. 通过式(13)得到  $d_k^c$ 。

执行器选择最新的控制量,

$$\hat{u}(k) = \theta_k^{\text{ca}} u(k) + (1 - \theta_k^{\text{ca}}) \hat{u}(k-1) \quad (17)$$

作用于被控对象。转到步骤 1。

## 3 稳定性分析和控制增益设计

在接下来的系统分析中,需用到以下定义。

**定义 1**<sup>[27]</sup> 若对于任意紧子集  $D_c \subset \mathbb{R}^n$  和任意初值  $x(0) = x_0 \in D_c$ , 存在常数  $\bar{\omega} \geq 0$  和时间常数  $T = T(\bar{\omega}, x_0)$ , 对于所有  $k \geq T, E(x^T(k)x(k) | x_0) \leq \bar{\omega}$  成立, 则系统式(1)的轨迹是均方最终一致有界的。

接下来将得到 EBAC 策略下闭环系统的表达式。由式(17)和式(14)可知:

$$\hat{u}(k) = K(\tilde{P}_k)(\theta_k x(k) + (1 - \theta_k)\hat{x}(k-1)) \quad (18)$$

将式(11)、(18)代入系统式(1), 可得闭环系统为

$$\begin{cases} z(k+1) = \Phi_{\theta_k}(\tilde{P}_k)z(k) + \bar{C}\omega(k) & d_k = 0 \\ x(k+1) = (A + B K_N)x(k) + C\omega(k) & d_k = 1 \end{cases} \quad (19)$$

其中,

$$\Phi_{\theta_k}(\tilde{P}_k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \theta_k \mathbf{BK}(\tilde{P}_k) & (1 - \theta_k) \mathbf{BK}(\tilde{P}_k) \\ \theta_k \mathbf{I} & (1 - \theta_k) \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}^T = [\mathbf{C}^T \quad 0] \quad (20)$$

$\mathbf{I}$  为  $n$  阶单位阵,  $z^T(k) = [x^T(k), \hat{x}^T(k-1)]$ 。

接下来首先将得到丢包率未知但恒定的情况下,闭环系统式(19)均方最终一致有界的充分条件,然后得到假设1下保证闭环系统式(19)稳定性的条件。

**定理 1** 当丢包率恒定时,在设计的 EBAC 策略下,给定  $\gamma > 0$ ,若存在正定对称矩阵  $\mathbf{P}_{0,l}, \mathbf{P}_{1,l}$  以及矩阵集  $\mathbf{K}_l, 0 < \xi_l \leq 1, \kappa \geq 0$ ,使如下矩阵不等式对所有  $l \in \mathbb{N}$  均成立,则闭环系统式(19)均方最终一致有界。

$$\begin{bmatrix} \Phi_{i,l}^T \hat{P}_l \Phi_{i,l} - \xi_l \mathbf{P}_{i,l} + \kappa \mathbf{I} & \Phi_{i,l}^T \hat{P} \bar{C} \\ * & \bar{C}^T \hat{P}_l \bar{C} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (21)$$

其中  $l$  为控制器更新次数。

$$\hat{P}_l = \sqrt{1 - \rho_{k_l}} \mathbf{P}_{0,l} + \sqrt{\rho_{k_l}} \mathbf{P}_{1,l},$$

$$\Phi_{i,l} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + i \mathbf{BK}_l & (1 - i) \mathbf{BK}_l \\ i \mathbf{I} & (1 - i) \mathbf{I} \end{bmatrix}, i = 0, 1.$$

**证明** 定义李雅普诺夫函数为

$$V(x(k)) = z^T(k) \mathbf{P}_{\theta_{k,l}} z(k)$$

由控制器切换条件式(8)和信道调度策略式(11)可知,任意更新时刻  $k_l$  的状态满足

$$E(z^T(k_l + 1)z(k_l + 1) | x(k_l)) =$$

$$x^T(k_l)x(k_l) + E(x^T(k_l + 1)x(k_l + 1) | x(k))$$

$$\leq \underline{H} + x^T(k_l)(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_N)^T(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_N)x(k_l) \quad (22)$$

$$+ E(x^T(k_l)(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_N)\mathbf{C}\omega(k_l + 1)) +$$

$$E(\omega^T(k_l + 1)\mathbf{C}^T\mathbf{C}\omega(k_l + 1)) \leq \underline{H} + \Delta.$$

其中,

$$\Delta = \lambda_{\max}((\mathbf{A} + \mathbf{BK}_N)^T(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_N))\underline{H} + \lambda_{\max}(\mathbf{C}^T\mathbf{C})\delta^2, \lambda_{\max}(\cdot)$$
 为矩阵最大特征值。

当  $k \in [k_l, k_{l+1}]$  时,  $K(\tilde{P}_k) = \mathbf{K}_l, \Phi_{\theta_k}(\tilde{P}_k) = \Phi_{i,l}$ 。由李雅普诺夫函数可以得到:

$$E(V(k+1) - \xi_l V(k) + \kappa z^T(k)z(k) - \gamma^2 \omega^T(k)\omega(k) | z(k)) = \eta^T(k) Y_{i,l} \eta(k) \quad (23)$$

$$\text{其中, } Y_{i,l} = \begin{bmatrix} \Phi_{i,l}^T \tilde{P}_l \Phi_{i,l} - \xi_l \mathbf{P}_{i,l} + \kappa \mathbf{I} & \Phi_{i,l}^T \tilde{P}_l \bar{C} \\ * & \mathbf{C}^T \tilde{P}_l \bar{C} - \gamma^2 \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$i = 0, 1, \tilde{P}_l = \sqrt{1 - \rho_{k,l}} \mathbf{P}_{0,l} + \sqrt{\rho_{k,l}} \mathbf{P}_{1,l}, \eta^T(k) = [z^T(k), \omega^T(k)].$$

由于  $\tilde{P}_l \leq \hat{P}_l = \sqrt{1 - \rho_{k,l}} \mathbf{P}_{0,l} + \sqrt{\rho_{k,l}} \mathbf{P}_{1,l}$ ,所以式(21)保证了式(24)成立。

$$E(V(k+1) | z(k)) \leq \xi_l V(k) - \kappa z^T(k)z(k) + \gamma^2 E(\omega^T(k)\omega(k)) \quad (24)$$

由(24)可以得到:

$$E(V(k)) \leq \xi_l^{k-k_l} E(V(k_l)) + \frac{\xi_l}{1 - \xi_l} \gamma^2 \sigma^2 - \sum_{j=k_l}^k \xi_l^{j-k_l} \kappa z^T(j)z(j) \quad (25)$$

由控制器更新条件式(8)可知,控制器更新次数有限,所以当  $k$  趋于无穷时,  $k_l = k_f, k_f$  为最后一次控制器更新的时刻。

由式(25)可得,必存在时间  $T \geq k_f$ ,当  $k \geq T$  时,有式(26)成立。

$$E(V(k) | z(0)) \leq \frac{\xi_f}{(1 - \xi_f)} \gamma^2 \sigma^2 \quad (26)$$

由式(26)可得:

$$E(z^T(k)z(k) | z(0)) \leq \frac{\xi_f}{(1 - \xi_f) \lambda_{\min}(\mathbf{P}_{\theta_{k,f}})} \gamma^2 \sigma^2 \quad (27)$$

$\lambda_{\min}(\cdot)$  为矩阵最小特征值,定理得证。

**推论 1** 当丢包率恒定时,在设计的 EBAC 策略下,给定  $\gamma > 0$ ,若存在正定对称矩阵  $\mathbf{P}_{0,l}, \mathbf{P}_{1,l}, \mathbf{X}_{0,l}, \mathbf{X}_{1,l}$  以及矩阵  $\mathbf{K}_l, 0 < \xi_l \leq 1, \kappa \geq 0$ ,使如下矩阵不等式对所有  $l \in \mathbb{N}$  均成立,则闭环系统式(18)均方最终一致有界。

$$\begin{bmatrix} -\xi_l \mathbf{P}_{i,l} + \kappa \mathbf{I} & 0 & \sqrt{1 - \rho_{k_l}} \Phi_{i,l}^T & \sqrt{\rho_{k_l}} \Phi_{i,l}^T \\ * & -\gamma^2 \mathbf{I} & \sqrt{1 - \rho_{k_l}} \bar{C}^T & \sqrt{\rho_{k_l}} \bar{C}^T \\ * & * & -\mathbf{X}_{1,l} & 0 \\ * & * & * & -\mathbf{X}_{2,l} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_{i,l} \mathbf{X}_{i,l} = \mathbf{I} (i = 0, 1).$$

**证明** 通过对式(21)求舒尔补可得式(28),则式(28)可用算法2的方法求解。

**算法 2** 式(28)求解算法

初始化:置  $\tau=0.1, \xi_0=1, l=0$ 。

1. 利用锥补线性化算法<sup>[28]</sup>求解式(28)。
2. 若有解,  $\tau = \frac{\tau}{2}, \xi_{l+1} = \xi_l - \tau, l = l + 1$ , 输出解。
3. 否则,  $\xi_l = \xi_l + \tau, \tau = 2\tau$ , 转步骤 1。

对  $\rho$  越精确的估计可以得到较小的  $\xi$ , 由式(25)和(27)可知, 较小的  $\xi$  有利于提高收敛速率以及得到系统状态更小的界。

算法 2 得到的  $\xi$  可能大于 0, EBAC 策略依然能保证系统稳定性, 推论 2 给出了证明。

**推论 2** 在假设 1 下, 使用 EBAC 策略, 若由推论 1 得到控制增益  $K(\tilde{P}_k)$ , 则对任意突变时刻  $t_i, i \in \mathbb{N}$ , 存在常值  $\zeta_i$ , 使闭环系统式(18)的状态满足:

$$E(x^T(t_i)x(t_i) | z(t_{i-1})) \leq \zeta_i \quad (29)$$

**证明** 对任意  $[t_i, t_{i+1}]$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , 在估计之初, 由式(4)可知  $\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k \approx 1$ , 推论 1 中  $\xi$  大于 0, 可能导致闭环系统式(19)失稳。此时, 信道调度机制式(11)将信道切换为非竞争信道, 通过增益  $K_N$  保证存在时间  $k$ , 使  $x^T(k)x(k) \leq \underline{H}$ , 控制增益更新。随着估计的收敛, 定理 1 成立。所以对于  $[t_i, t_{i+1}]$  中的任意更新时刻, 有式(22)成立。

由于在  $[t_i, t_{i+1}]$  内更新次数有限, 必存在:

$$\Lambda_{\min} = \lambda_{\min}(P_{i,l}), \Lambda_{\max} = \lambda_{\max}(P_{i,l}) \quad (30)$$

其中,  $i=0, 1; l \in 1, 2, 3 \dots$ 。

由式(22)和(25)可知,  $E(x^T(t_{i+1})x(t_{i+1}) | z(0))$  有界,

$$E(x^T(t_{i+1})x(t_{i+1}) | z(0)) \leq \Lambda(\underline{H} + \Delta) + \frac{\xi}{(1-\xi)\Lambda_{\min}} \gamma^2 \sigma^2,$$

其中  $\Lambda = \frac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_{\min}}$ , 推论 2 得证。

当  $[t_i, t_{i+1}]$  的间隔足够大时, 系统状态上界如式(27)所示。推论 2 说明了 EBAC 策略能保证闭环系统式(19)的稳定性。

**注 3** 定理 1 中参数与丢包变化率没有关系。因为 EBAC 策略通过丢包率突变检测器得到突变时刻  $t_i$ , 控制量计算无需考虑丢包率变化。过快的丢包变化可能导致系统振荡。首先, 丢包率变化过快可能导致丢包率突变, 检测器无法得到准确的突变

时刻, 使丢包率估计和控制量出错。其次, 丢包率突变可能使丢包率估计区间不断被重置, 这将可能导致定理 1 一直无解。但在实际情况中, 丢包变化率通常远小于采样频率, 丢包率在发生突变后将有一段较长的时间保持不变<sup>[23]</sup>。

## 4 数值仿真

本节将用 2 个数值仿真的例子来验证 EBAC 策略的有效性。

**例 1:** 考虑如下系统<sup>[29]</sup>。

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + C\omega(k)$$

其中系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1.01 & 0.10 \\ 0.00 & 0.99 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.0787 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0787 \end{bmatrix}$$

$$C^T = [0.005 \quad 0.005]$$

扰动方差  $\sigma^2 = 1$ , 系统初态  $x_0^T = [0.9, -0.9]$ 。

丢包率设置如下, 丢包率在 600 步发生突变,

$$Pr(\theta_k^{sc} = 0) = \begin{cases} 0.03 & 0 \leq k < 600 \\ 0.60 & k \geq 600 \end{cases}$$

所以网络的闭环丢包率为

$$Pr(\theta_k = 0) = \begin{cases} 0.0591 & 0 \leq k < 600 \\ 0.8400 & k \geq 600 \end{cases}$$

网络丢包情况如图 3 所示。

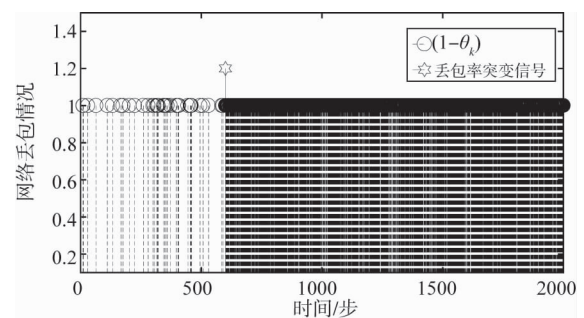


图 3 网络丢包情况

设置 EBAC 策略超参数为  $\bar{H} = 1.2 x_0^T x_0$ ,  $\underline{H} = 0.1, \varepsilon = 0.08, M = 100, \gamma^2 = 0.9$ , 估计置信度  $\alpha = 0.99$ , 超参的取值可根据实际任务需求决定, 例如对状态的约束、控制器算力、网络信道调度频率等。  $\underline{H}$  越大,  $M, \varepsilon$  越小, 控制器更新次数越多。

设置 EBAC 策略超参数为  $\bar{H} = 1.2 x_0^T x_0$ ,  $\underline{H} =$

0.1,  $\varepsilon = 0.08$ ,  $M = 100$ ,  $\gamma^2 = 0.9$ , 估计置信度  $\alpha = 0.99$ , 超参的取值可根据实际任务需求决定, 例如对状态的约束、控制器算力、网络信道调度频率等。 $H$  越大,  $M, \varepsilon$  越小, 控制器更新次数越多。

在上述参数下, 得到系统状态轨迹如图 4 所示, 在第 600 步丢包率突变后, 系统出现短暂抖动后恢复稳定。图 5 所示为未采用 EBAC 策略得到的控制结果<sup>[12]</sup>, 丢包率发生突变后无法保证系统稳定性。

图 6 为丢包率估计区间, 在丢包率突变前, 估计区间逐渐逼近真值。丢包率突变检测器在第 632 步检测出突变, 使丢包率估计器重新从  $[0, 1]$  开始估计丢包率。图 7 为信道调度信号, 由控制器更新和状态越界 2 部分原因组成。

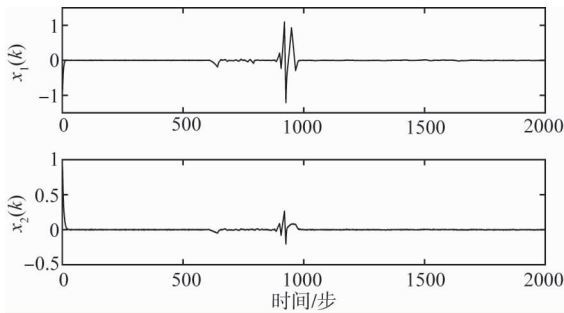


图 4 EBAC 策略下系统状态轨线

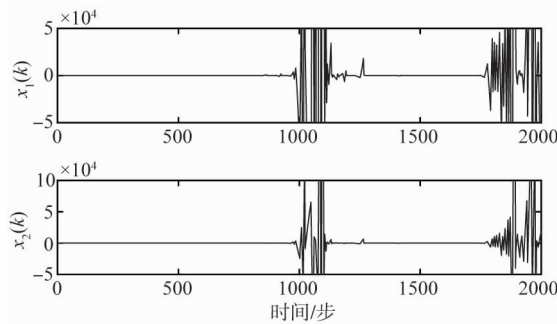


图 5 不加 EBAC 策略下系统状态轨线<sup>[12]</sup>

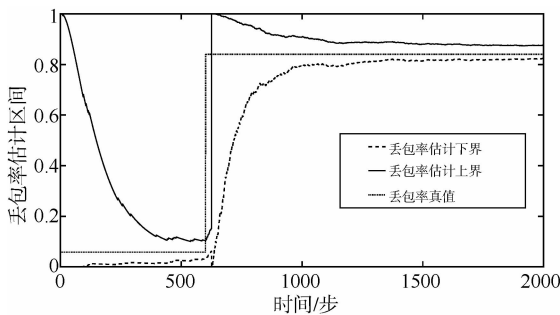


图 6 丢包率估计区间  $P_k$

例 2: 考虑文献[11]中直流电机伺服系统。系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1.120 & 0.213 & -0.333 \\ 1.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C^T = [0.0541 \quad 0.005 \quad 0.0001]$$

扰动方差  $\sigma^2 = 0.5$ , 系统初态  $x_0^T = [1, 1, -1]$ 。网络丢包率分别在第 1000、2000、3000 步发生突变。

$$Pr(\theta_k = 0) =$$

$$\begin{cases} 0.0591 & 0 \leq k < 1000, 2000 \leq k < 3000 \\ 0.6400 & 1000 \leq k < 2000, 3000 \leq k < 4000 \end{cases}$$

超参选择与例 1 相同, 得到系统状态轨线如图 8 所示。 $\xi$  如图 9 所示,  $\xi$  随着估计收敛逐渐减小。

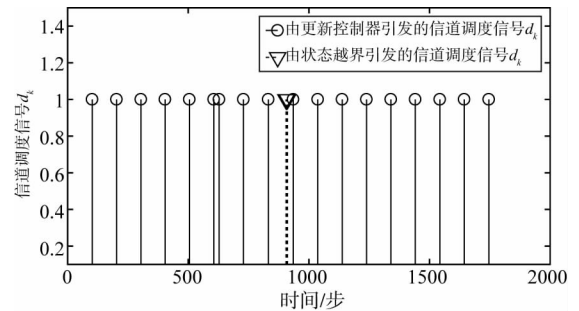


图 7 信道调度信号  $d_k$

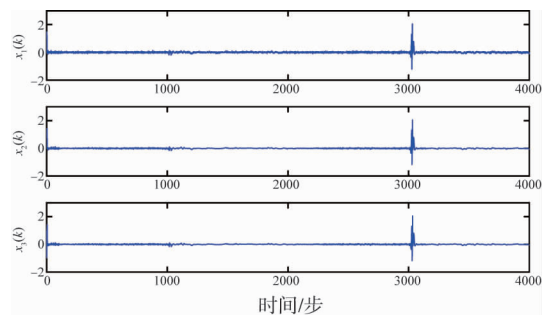


图 8 EBAC 策略下系统状态轨线

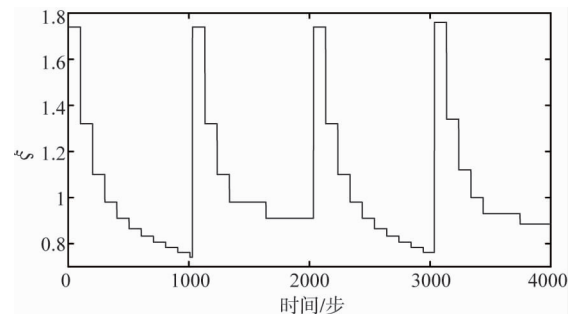


图 9  $\xi$  随时间的变化轨迹

## 5 结论

本文针对丢包率满足分段伯努利过程的无线网络化控制系统,设计了EBAC算法,通过证明和仿真说明了丢包率在未知时刻突变到未知概率后,EBAC策略依然能保证系统稳定。EBAC策略能广泛应用于网络拓扑易变化以及易受攻击的无线网络化控制系统中。在未来的工作中将尝试减少更新控制增益的计算量,以满足更为实际的应用需求。

### 参考文献

- [1] PARK P, ERGEN S, FISCHIONE C, et al. Wireless network design for control systems: a survey[J]. IEEE Communications Surveys and Tutorials, 2018, 20(2): 978-1013.
- [2] ZHANG X, HAN Q, YU X. Survey on recent advances in networked control systems[J]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2016, 12(5): 1740-1752.
- [3] JI B, ZHANG X, MUMTAZ S, et al. Survey on the Internet of vehicles: network architectures and applications [J]. IEEE Communications Standards Magazine, 2020, 4(1): 34-41.
- [4] YUE W, GUO G. Control of autonomous platoon under networked communication effect[J]. Control Theory and Application, 2011, 28(7): 1041-1048.
- [5] WU Y, KARIMI H, LU R. Sampled-data control of network systems in industrial manufacturing [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2018, 65(11): 9016-9024.
- [6] CHAKMA R, MAHTAB S, AKTER M, et al. Navigation and tracking of AGV in ware house via wireless sensor network [C] // 2019 IEEE 3rd International Electrical and Energy Conference. Beijing: IEEE, 2019: 1686-1690.
- [7] OUBBATI O, ATIQUZZAMAN M, LORENZ P, et al. Routing in flying ad hoc networks: survey, constraints and future challenge perspectives [J]. IEEE Access, 2019, 7: 81057-81105.
- [8] POLLIN S, ERGEN M, ERGEN S, et al. Performance analysis of slotted carrier sense IEEE 802.15.4 medium access layer[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(9): 3359-3371.
- [9] BIANCHI G. Performance analysis of the IEEE 802.11 distributed coordination function [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2000, 18(3): 535-547.
- [10] ZHU Y, YANG F, LI C, et al. Strong  $\gamma_c$ - $\gamma_{cl}$   $H_\infty$  stabilization for networked control systems under denial of service attacks[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(5): 2723-2741.
- [11] ZHAO Y, LIU G, REES D. Design of a packet-based control framework for networked control systems [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, 17(4): 859-865.
- [12] WANG Y, HE P, LI H, et al.  $H_\infty$  control of networked control system with data packet dropout via observer-based controller [J]. IEEE Access, 2020, 8: 58300-58309.
- [13] YANG H, XU Y, ZHANG J. Event-driven control for networked control systems with quantization and Markov packet losses [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017 47(8): 2235-2243.
- [14] ZHANG W, BAE J, TOMIZUKA M. Modified preview control for a wireless tracking control system with packet loss [J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2015, 20(1): 299-307.
- [15] WANG Y, HE P, LI H, et al. Stabilization for networked control system with time-delay and packet loss in both s-c side and c-a side [J]. IEEE Access, 2020, 8: 2513-2523.
- [16] JIA T, NIU Y, WANG X H.  $H_\infty$  control for networked systems with data packet dropout [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2010, 8(2): 198-203.
- [17] LU Q, ZHANG L, BASIN M, et al. Analysis and synthesis for networked control systems with uncertain rate of packet losses [J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349(7): 2500-2514.
- [18] WANG MH, LI S S. Self-tuning fusion filter for multi-sensor systems with unknown packet receiving rates [C] // 2019 Chinese Control Conference. Guangzhou: IEEE, 2019: 3583-3588.
- [19] HAO X, JAGANNATHAN S, LEWIS F L. Stochastic optimal control of unknown linear networked control system in the presence of random delays and packet losses [J]. Automatica, 2012, 48(6): 1017-1030.
- [20] JIANG Y, FAN J, CHAI T, et al. Tracking control for linear discrete-time networked control systems with unknown dynamics and dropout [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2018, 29(10): 4607-4620.
- [21] TAISHI F, TOSHIMITSU U. Application of reinforcement learning to output feedback networked control systems with network delay [J]. The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers, 2016, 115(419): 113-118.
- [22] ZHAO Y, PAN X, YU S. Predictive event-triggered control for disturbed wireless networked control systems [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2021, 34(8): 1028-1043.
- [23] KANG Y, ZHAO Y. Dynamic data packing towards the optimization of QoC and QoS in networked control systems [J]. Science China Technological Sciences, 2016, 59(1): 72-80.
- [24] LAWRENCE D, CAI T, ANIRBAN D. Interval estimation for a binomial proportion [J]. Statistical Science, 2001, 16(2): 101-117.
- [25] 方洋旺. 随机系统最优化控制 [M]. 北京: 清华大学



- 出版社, 2005.
- [26] SHELDON M. A first course in probability [M]. Prentice; Prentice Hall, 2002.
- [27] ZHAO X, SHI P, ZHENG X, et al. Adaptive tracking control for switched stochastic nonlinear systems with unknown actuator dead-zone [J]. *Automatica*, 2015, 60: 193-200.
- [28] EL G L, OUSTRY F, AITRAMI M A. Cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171-1176.
- [29] LI Q, YANG S, MEMBER S, et al. Network-based robust  $H/H_\infty$  control for linear systems with two-channel random packet dropouts and time delays [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2015, 45(8): 1450-1462.

## Packet loss rate estimation based approximating control for wireless networked control systems

WU Fang, LIANG Qipeng, YE Ruiqing, ZHAO Yunbo

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

### Abstract

The control design and stability analysis of wireless networked control systems with piecewise Bernoulli process packet loss rate are investigated. The piecewise Bernoulli process means that the packet loss rate will switch to another unknown probability suddenly at unknown time and remains there for a certain time period. To deal with this characteristic, an estimation based approximating control strategy is proposed. First, a packet loss rate estimator and an approximating controller are designed to obtain the packet loss rate estimation. Then, a channel selection mechanism is designed to balance the control performance and the network channel utilization. Finally, a packet loss rate sudden change detector is designed to make the systems adapt to such a sudden change. On this basis, the sufficient conditions to ensure the closed-loop system being mean-square uniformly ultimately bounded are given, along with the controller gain design method. The effectiveness of the proposed approach is verified numerically.

**Key words:** wireless networked control, packet loss rate estimate, piecewise Bernoulli process, approximating controller