

中国科学技术大学

博士学位论文



面向分布式模型预测控制的事件驱动策略设计与分析

作者姓名： 王涛

学科专业： 控制科学与工程

导师姓名： 康宇 教授 赵云波 教授

完成时间： 二〇二三年五月二十九日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Design and Analysis of Event-Driven Strategies for Distributed Model Predictive Control

Author: Wang Tao

Speciality: Control Science and Engineering

Supervisors: Prof. Kang Yu, Prof. Zhao Yun-Bo

Finished time: May 29, 2023

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所提交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

控阅的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开 控阅（____年）

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘 要

分布式模型预测控制具有控制性能出色、多约束和多目标处理能力强、灵活性和容错性高等优点，在智能电网、城市交通网络、工业控制等诸多领域得到了广泛应用。在该类控制系统中，负责局部优化的节点的计算资源往往有限且节点之间信息的传输容易受到网络资源的限制。这使得只在特定的时刻执行控制动作的事件驱动策略成为分布式模型预测控制中的研究热点。

尽管已经取得一定的研究进展，但兼顾系统稳定性和算法可行性的低触发策略仍有待研究，其核心原因是用于确保稳定性的 Lyapunov 函数递减原则和基于不精确的状态预测误差保证可行性所必然带来的频繁触发问题。面向这一挑战，本文从改变稳定性保证原则和提高预测误差精度的角度展开分布式模型预测控制的事件驱动策略研究，具体工作包括：

1. 面向 Lyapunov 分析方法保守的触发策略设计，提出了自适应事件触发分布式模型预测控制策略。定义了具有衰减预测时域的最优控制问题并基于此设计了触发条件，降低了计算复杂度和触发频率，从而降低了计算和通信负载。
2. 面向邻居信息非精确可知的触发策略设计，提出了复合事件触发分布式模型预测控制策略，解决了在单一稳定性触发条件下频繁触发问题。设计与邻居系统估计信息无关的稳定性触发条件，其联合基于 Lyapunov 函数的稳定性条件以并行触发的方式，降低了事件触发频率。
3. 面向预测模型不精确的触发策略设计，提出了基于扰动预测的自适应事件触发分布式模型预测控制策略，提高了模型预测精度。设计了基于中心路径的扰动预测方案和自适应触发阈值方案，降低了状态预测误差，提高了触发阈值，显著降低了触发频率。
4. 面向系统动态互联的触发策略设计，提出了滚动自触发分布式模型预测控制策略，简化了优化问题设计，减小了状态预测误差估计的保守性。设计了双模型最优控制问题，简化算法可行性分析的同时优化了控制性能。设计了滚动自触发机制，增大了自触发的触发间隔，降低了计算和通信负载。

综上所述，本文对分布式模型预测控制的事件驱动策略设计和分析进行了系统性的研究，创新地提出了对应的解决方案，推动了分布式模型预测控制的进一步发展。

关键词：分布式模型预测控制 事件触发控制 自触发控制 计算和通信资源受限

ABSTRACT

Distributed model predictive control (DMPC) has the advantages of excellent control performance, strong multi-constraint and multi-objective processing ability, flexibility and high fault tolerance, and has been widely used in many fields such as smart power grids, urban traffic networks, and industrial control. In this kind of control system, the computing resources of nodes responsible for local optimization are often limited and the transmission of information between nodes is easily restricted by network resources. This makes the event-driven strategy that only executes the control action at a specific time become a research hotspot in distributed model predictive control.

Although some research progress has been made, the low trigger strategy that takes into account the stability of the system and the feasibility of the algorithm remains to be studied. The core reason is that the Lyapunov function decreasing principle used to ensure stability and the inexact state prediction error to analyze the feasibility will inevitably bring frequent trigger problems. In response to this challenge, this dissertation studies the event-driven strategy of distributed model predictive control from the perspective of changing the stability guarantee principle and improving the accuracy of prediction error. Specifically,

1. Aiming at the triggering strategy design under the conservative Lyapunov analysis method, an adaptive event-triggered DMPC strategy is proposed. The optimal control problem with decreased prediction horizon is defined and the triggering conditions is designed based on this, reducing computational complexity and triggering frequency, thereby reducing computational and communication loads.
2. Aiming at the triggering strategy design under the imprecise knowledge of neighbor information, a compound event-triggered DMPC strategy is proposed, which solves the problem of frequent triggering under a single stable triggering condition. A stability triggering condition independent of the neighbor system estimation information is designed, which combines the stability condition based on the Lyapunov function to trigger in parallel, and reduces the event triggering frequency.
3. Aiming at the triggering strategy design under the inaccurate prediction model, an adaptive event-triggered DMPC strategy based on disturbance prediction is proposed, which improves the accuracy of model prediction. The disturbance prediction scheme based on the central path and the adaptive trigger threshold scheme

are designed to reduce the state prediction error, improve the trigger threshold, and significantly reduce the trigger frequency.

4. Aiming at the triggering strategy design under dynamic interconnection of systems, a rolling self-triggered DMPC strategy is proposed, which simplifies optimal control problem design and reduces the conservatism of state prediction error estimation. A dual model optimal control problem is designed to simplify the feasibility analysis of the algorithm while optimizing control performance. A rolling self-triggering mechanism is designed to increase the trigger interval of self-triggering and reduce computational and communication loads.

In summary, this dissertation systematically studies the event-driven strategy design and analysis of DMPC, innovatively proposes corresponding solutions, and promotes the further development of DMPC.

Key Words: Distributed model predictive control, Event-triggered control, Self-triggered control, Limited computation and communication resource

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景及意义	1
1.2 模型预测控制原理及研究现状	2
1.2.1 模型预测控制原理	2
1.2.2 模型预测控制研究现状	3
1.3 分布式模型预测控制原理及研究现状	6
1.3.1 分布式模型预测原理及分类	6
1.3.2 分布式模型预测研究现状	9
1.4 基于事件驱动模型预测控制	11
1.4.1 基于事件驱动模型预测控制研究现状	11
1.4.2 基于事件驱动的分布式模型预测控制研究现状	13
1.5 本文研究内容和组织结构	14
1.5.1 研究问题总结	14
1.5.2 研究内容	15
1.5.3 本文组织结构	17
第 2 章 多智能体系统的自适应事件触发分布式 MPC	19
2.1 引言	19
2.2 问题描述	20
2.3 自适应事件触发分布式模型预测控制策略设计	21
2.3.1 分布式优化问题	21
2.3.2 事件触发策略	23
2.4 策略分析	24
2.4.1 方法可行性分析	24
2.4.2 多智能体一致性分析	27
2.5 仿真验证	28
2.6 本章小结	31
第 3 章 耦合非线性系统的复合事件触发分布式 MPC	33
3.1 引言	33
3.2 问题描述	34
3.3 复合事件触发分布式模型预测控制策略设计	36
3.3.1 分布式优化问题	36

3.3.2	复合事件触发条件	40
3.3.3	复合事件触发分布式模型预测控制算法	45
3.4	策略分析	46
3.4.1	真实状态约束分析	46
3.4.2	迭代可行性分析	47
3.4.3	稳定性分析	50
3.5	仿真验证	52
3.6	本章小结	56
第 4 章 受扰非线性系统的扰动预测事件触发分布式 MPC		
4.1	引言	57
4.2	系统描述	58
4.3	扰动预测事件触发分布式模型预测控制策略设计	59
4.3.1	基于中心路径的扰动预测	59
4.3.2	局部最优控制问题描述	64
4.3.3	触发条件设计和迭代可行性	68
4.3.4	稳定性分析	71
4.4	输入仿射非线性情况	73
4.4.1	系统描述和扰动分解	73
4.4.2	事件触发分布式模型预测控制算法设计	74
4.5	仿真验证	77
4.6	本章小结	83
第 5 章 耦合非线性系统的滚动自触发分布式 MPC		
5.1	引言	85
5.2	问题描述和准备工作	85
5.2.1	问题描述	85
5.2.2	准备工作	86
5.3	滚动自触发分布式模型预测控制策略设计	88
5.3.1	双模型最优控制问题	88
5.3.2	滚动自触发机制	90
5.4	策略分析	93
5.4.1	Zeno 行为的避免	93
5.4.2	迭代可行性分析	93
5.4.3	稳定性分析	96
5.5	仿真验证	98

5.6 本章小结	101
第 6 章 总结与展望	103
6.1 本文的主要研究工作	103
6.2 研究展望	104
参考文献	107
致谢	119
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	121

插图清单

图 1.1	模型预测控制原理图	3
图 1.2	分散式控制结构	6
图 1.3	局部控制器位于本地的分布式控制结构	7
图 1.4	局部控制器位于远程的分布式控制结构	7
图 1.5	本文整体研究框架	15
图 1.6	本文组织结构	17
图 2.1	四个车辆组成的多智能体系统, 其中的虚线表示车辆之间的信息传输	28
图 2.2	四个车辆的位置轨迹	29
图 2.3	四个车辆的速度轨迹	30
图 2.4	四个车辆的控制输入	30
图 2.5	四个车辆的触发时刻和预测时域	31
图 3.1	网络化控制系统的事件触发分布式模型预测控制架构	34
图 3.2	假设状态构造示意图	37
图 3.3	仿真系统的结构图	53
图 3.4	系统的状态轨迹	54
图 3.5	系统的控制输入轨迹	54
图 3.6	文献 [131] 中算法下的触发时刻 (“×”) 和传输时刻 (“○”)	55
图 3.7	算法 3.1 下的触发时刻 (“×”) 和传输时刻 (“○”)	55
图 4.1	基于中心路径的扰动预测	59
图 4.2	机器人离目标位置的距离变化曲线	78
图 4.3	机器人朝向的演化曲线	78
图 4.4	机器人的控制输入 (线速度)	79
图 4.5	机器人的控制输入 (角速度)	79
图 4.6	算法 4.1 下所有机器人的触发情况	80
图 4.7	算法 4.2 下所有机器人的触发情况	80
图 4.8	传统 ET-DMPC 算法下所有机器人的触发情况	81
图 4.9	周期性 DMPC 算法下所有机器人的触发情况	81
图 4.10	算法 4.1 下所有机器人的触发情况	82
图 4.11	算法 4.2 下所有机器人的触发情况	82

插图清单

图 5.1	滚动自触发机制 ·····	91
图 5.2	每个物块的状态轨迹 ·····	99
图 5.3	每个物块的控制输入 ·····	99
图 5.4	传统自触发机制下的触发时刻 ·····	100
图 5.5	所提算法下的触发时刻（蓝线）和采样时刻（红线） ·····	100

算法清单

2.1	自适应 ET-DMPC 算法	23
3.1	复合 ET-DMPC 算法	46
4.1	基于扰动预测的 ET-DMPC 算法	70
4.2	基于扰动预测的 ET-DMPC 算法（输入仿射情况）	77
5.1	滚动 ST-DMPC 算法	93

符号说明

\mathbb{Z} 非负整数集

\mathbb{N} 正整数集

\mathbb{R} 实数集

$\mathbb{R}_{\geq 0}$ 非负实数集

\mathbb{R}^n n 维欧几里德空间

$A \ominus B$ 庞特里亚金差集, 即 $\{x : x + y \in A \subseteq \mathbb{R}^n, \forall y \in B \subseteq \mathbb{R}^n\}$

$A \oplus B$ 闵可夫斯基和集, 即 $\{x + y : x \in A \subseteq \mathbb{R}^n, y \in B \subseteq \mathbb{R}^n\}$

$\mathbb{B}(r)$ \mathbb{R}^n 空间内半径为 r 的闭球, 即 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq r\}$

x^T 向量 x 的转置

$\|x\|$ 向量 x 的欧几里德范数, 即 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$

$\|x\|_P$ 向量 x 的矩阵范数, 即 $\|x\|_P = \sqrt{x^T P x}$, P 为正定矩阵

$\|A\|_P$ 矩阵 A 的诱导矩阵范数, 即 $\|A\|_P = \sqrt{\lambda_{\max}(P^{-1/2} A^T P A P^{-1/2})}$, P 为正定矩阵, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示最大特征值

$\text{diag}\{\dots\}$ 块对角矩阵或对角矩阵

\mathcal{K} 类函数 函数 $\alpha: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ 连续, 单调递增且满足 $\alpha(0) = 0$

\mathcal{K}_{∞} 类函数 函数 $\alpha \in \mathcal{K}$ 并且当 $s \rightarrow \infty$ 时, $\alpha(s) \rightarrow \infty$

\mathcal{KL} 类函数 给定 k 时函数 $\beta(s, k)$ 为 \mathcal{K} 类函数, 对于给定 s 时函数 $\beta(s, k)$ 关于 k 单调递减且满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} \beta(s, k) = 0$

第1章 绪 论

1.1 研究背景及意义

实际的工业对象大都是非线性系统，不但会受到各种外界不确定性干扰，还会受到如执行器饱和、实际工艺限制的安全性、经济性等多种约束 [1]。例如实际的化学反应釜，被控对象是非线性模型，为了保证安全性需要将反应釜的温度和压力控制在一定的范围内 [2]。这使得用经典的控制理论设计的控制器应用到受约束的系统效果不佳，原因是设计控制器时无法考虑系统所需要满足的约束。另一方面，人们不再满足于简单的镇定系统，而希望系统能具有更好的控制性能，例如增加系统响应速度的同时减小系统的振荡。最优控制 [3-4] 随之产生，最优控制的高性能依赖于高精度的系统模型，但是实际系统一方面受到外部不确定的影响，另一方面现代工业系统也变得越来越复杂，伴随着时变性、非线性，这使得精确的数学模型难以建立，最优控制应用到一些实际系统效果并不佳 [5]。因此，实际工业过程控制需要一种控制方法能在处理系统非线性、多约束的情况下，达到一定的优化性能，同时具有一定的鲁棒性。在这样的背景下，模型预测控制（Model Predictive Control, MPC）应运而生。模型预测控制是研究者于上世纪 70 年代提出的一种优化控制方法 [6]，在当前采样时刻在线求解给定性能指标以及系统约束的优化问题，在获得一系列控制量后将第一个控制量运用到系统中。下一采样时刻，在采样出对象的实际输出后，通过反馈策略，对模型进行修正，然后重复上述操作，进而也对模型误差进行了反馈校正 [7-8]。所以，鉴于以上优势，模型预测控制不仅在理论研究上取得了丰硕的成果 [9-11]，也广泛应用于多种领域，例如电力电网 [12]、化工 [13]、车辆 [14]、水下航行器 [15] 等。

随着生产的发展和科技的进步，实际很多系统趋向复杂大规模化，例如电力系统、城市交通网、城市水资源分配系统、多智能车辆系统等普遍具有多子系统、多约束、维数高、结构复杂、地域分散等特点。传统的集中式模型预测控制很难在这些大型系统实施，原因主要有三点：1) 随着系统规模变大、系统维数高、约束多、决策变量多，采用集中式控制会导致巨大的计算量；2) 集中式控制灵活性差、可靠性低，一旦集中控制器发生故障，整个系统失控；3) 某些情况下无法实施集中式控制，例如多智能车辆系统，每个车辆的控制器无法获得全局信息 [16-17]。基于上述原因，研究学者对分布式控制进行了深入研究，进而诞生了分布式模型预测控制（Distributed Model Predictive Control, DMPC）。分布式模型预测控制首先继承了模型预测控制直接处理约束和优化控制性能等优势，同时具备分布式控制结构的优势，即：1) 将一个复杂大规模优化问题分解成多个子问题，分配给各个子系统处理，进而降低计算复杂度；2) 分布式的控制结

构避免了单个系统失稳引起的全局失稳，增加了系统的容错性；3) 每个子系统无需系统的全局信息，可以灵活部署；4) 允许子系统之间信息交互，从而优化整体的控制性能 [18-20]。因此，分布式模型预测控制已经在工业领域和理论研究方面引起广泛关注。

传统的分布式模型预测控制采用的是时间触发机制，也就是周期性地对优化问题的求解以及子系统之间的信息交互，这不可避免地导致了计算资源和通信资源的浪费。在倡导资源高效利用的背景下，灵活且节约资源的控制方法更符合时代要求。此外，在某些给定的控制结构和共享网络下，计算和通信资源是有限的，也亟需寻找一种控制方式来达到降低资源消耗的目的。事件驱动控制则是针对此问题的一种好的解决方案。在事件驱动控制中，控制动作（采样、计算、传输等）的执行只在某些事先设计好的触发条件满足时才执行，而不是周期性地对优化问题进行，从而降低触发频率，进而降低资源消耗 [21-23]。将事件驱动与分布式模型预测控制结合形成事件驱动分布式模型预测控制。在事件驱动分布式模型预测控制中，优化问题的计算和子系统之间的信息交互只在特定的触发时刻进行，因而能够有效地降低计算和通信负载。近些年在学术界和实际应用领域引起了广泛关注。

1.2 模型预测控制原理及研究现状

1.2.1 模型预测控制原理

模型预测控制是一种开环预测策略。在每个采样时刻，基于当前信息，在线求解一个有限时域的最优控制问题（Optimal Control Problem, OCP），该优化问题以最小化代价函数为目标，以控制输入序列为决策变量，并显式地处理系统所需要满足的约束。优化结果是得到一个最优控制序列，在当前时刻将控制序列中的第一个元素应用到系统中而非逐个使用控制序列中的元素。最小化代价函数涉及系统的未来行为，而未来行为是基于系统模型预测的，所以称为模型预测控制。在下一采样时刻，基于最新采样得到的信息重复上述优化过程。这样滚动式地向前预测，因而也被称为滚动时域控制。

以下通过一个系统来说明模型预测控制的原理。考虑如下离散时间系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) \quad (1.1)$$

其中 $x(k)$ 和 $u(k)$ 分别是系统的状态和控制输入。系统所需要满足的约束是

$$x(k) \in \mathbb{X}, u(k) \in \mathbb{U}$$

集合 \mathbb{X} 和 \mathbb{U} 是包含原点的紧集。

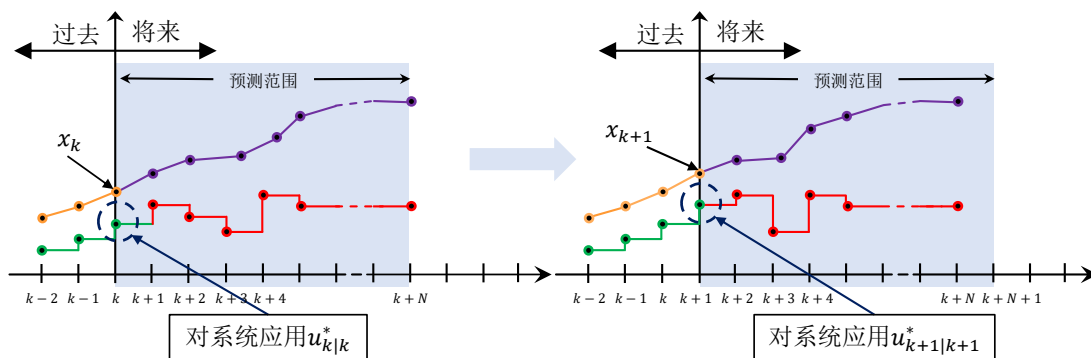


图 1.1 模型预测控制原理图

黄色和绿色的线分别表示过去的状态和输入轨迹，紫色和红色的线分别表示未来的状态和输入轨迹。

模型预测控制在线求解一个最优控制问题以获得针对期望性能指标优化系统未来行为的控制动作，使用的是系统动态模型来预测系统未来行为。最优控制输入可以通过求解以下最优控制问题得到。

$$\min_{\mathbf{u}(k)} J(k) = \sum_{m=0}^{N-1} L(x(k+m|k), u(k+m|k)) + F(x(k+N|k)) \quad (1.2a)$$

$$\text{s.t. } x(k+m+1|k) = f(x(k+m|k), u(k+m|k)) \quad (1.2b)$$

$$x(k|k) = x(k) \quad (1.2c)$$

$$x(k+m|k) \in \mathbb{X} \quad (1.2d)$$

$$u(k+m|k) \in \mathbb{U}, m = 0, \dots, N-1 \quad (1.2e)$$

$$x(k+N|k) \in \mathbb{X}^f, \quad (1.2f)$$

其中 $J(x(k), \mathbf{u}(k))$ 是代价函数，表示具体的优化性能指标， N 是有限的预测时域。 $x(k+m|k)$ 表示在当前时刻 k 对未来时刻 $k+m$ 的预测状态，其演化基于系统动态方程 (1.1) 和当前的初始状态 $x(k)$, $\mathbf{u}(k) = \{u(k|k), u(k+1|k), \dots, u(k+N-1|k)\}$ 是预测控制序列。(1.2d)-(1.2f) 分别是系统的状态约束、控制约束、终端状态约束。

如图 1.1 所示，在当前时刻 k ，求解上述最优控制问题，从而得到最优控制序列 $\mathbf{u}^*(k)$ ，然后将控制序列中的第一个元素，即： $u^*(k|k)$ ，用到系统中。在下一个采样时刻 $k+1$ ，测量得到最新的状态信息 $x(k+1)$ ，然后重复上述过程。

1.2.2 模型预测控制研究现状

模型预测控制自上世纪 70 年代提出就一直根据不同的需求而改进，最初为了应用于工业过程控制，诞生了动态矩阵控制 [24]，但是稳定性难以分析，于是后续产生了广义预测控制 [25-26]，此算法可以定量分析系统的闭环稳定性。但是此算法难以推广到具有约束、非线性等特点的系统中。

为了能从理论的角度分析模型预测控制的闭环稳定性,学者做了多方面尝试。首先是1978年Kwon等人[27]对于线性系统提出的终端等式约束,将最后的预测状态强制设置为零。研究[28-29]对非线性系统做了同样的终端等式约束,但是从计算角度来看,在非线性情况下,终端等式约束的精确满足需要无限次迭代,在实际应用中很难保证,难以推广。通常模型预测控制是求解一个有限时域的优化问题,但是在1990年Bitmead等人的研究中表明一般形式的有限时域模型预测控制难以保证系统的稳定性,闭环稳定性只能通过对预测时域、加权矩阵等参数的适当调整来保证。因此,Bitmead等人[30]提出了一种无限预测时域的方法来保证稳定性,但是只能求解无约束的线性系统。对于线性约束的系统,Rawlings等人[31]提出了一种无限预测时域、有限控制时域方案,系统的闭环稳定性由约束的可行性保证,与性能参数的选取无关,但是无限时域实际难以实施。针对终端等式约束难以满足,无限时域不易实施问题,Michalska等人于1993年在[32]中提出了有限预测时域的终端不等式约束模型预测控制方案。该方案提出了一种双模策略,在终端区域内采用局部线性状态反馈控制器,在终端区域外采用模型预测控制器,通过切换两个控制器,根据终端区域内外的状态来实现闭环稳定控制。Chen等人在此基础上提出伪无限时域的模型预测控制方案,给出了终端区域和终端权重矩阵的具体确定方法,在终端区域内,一个带有权重矩阵的终端代价可以近似替代无限时域的代价,进而保证了系统的稳定性[33]。

实际系统会带有不确定性,例如外部扰动和模型不匹配,如何有效地处理不确定性,是理论研究和实际应用都需关注的重要话题。模型预测控制本身具有一定的鲁棒性,也就是对于充分小的扰动,标准的模型预测控制依旧可以达到预期控制性能[34]。然而,标准模型预测控制的鲁棒性有限,可能无法在实际系统中提供足够的性能。因此,许多研究工作都致力于开发鲁棒模型预测控制,旨在保证约束和不确定性存在情况下的闭环性能。根据现有的鲁棒模型预测控制研究中对不确定性处理策略,主要有三种方法:基于管(tube-based)的方法、基于最小-最大优化(min-max)的方法和约束收缩(constraint tightening)方法。

- 1) 基于管的MPC: 我们知道对于不确定性系统,采用闭环反馈控制优于开环控制,而标准的MPC是开环控制。因此,研究学者希望在MPC预测中包含反馈部分。在MPC优化问题中,通过使用依赖于系统状态的控制律来实现反馈MPC。然而,这样不可避免地会导致更复杂的最优控制问题。为了解决这个问题,研究学者提出了基于管的MPC。基于管的MPC是Chisci以及Mayne等人于2001年明确提出的[35-36],基本思想是基于局部反馈控制律收紧状态约束集合,从而保证所有可能实现的不确定性下约束满足[1],例如研究[36]将(1.2d)中的状态约束修改为 $x(k+m|k) \in \mathbb{X} \ominus \mathbb{B}$, (1.2e)控制约束修改为 $u(k+m|k) \in \mathbb{U} \ominus K\mathbb{B}$,其中集合 \mathbb{B} 是状态预测误差集, K 是反

馈增益。基于管的 MPC 研究一开始是从固定不变的管开始 [36-39]，也就是管道的横截面 $\times \Theta \mathbb{B}$ 和 $\cup \Theta K\mathbb{B}$ 是离线计算好的，在线优化中是固定不变的，但是这样固定的管道很难准确近似不确定性的影响，所以后面学者提出动态管的 MPC [40-43]。研究 [41] 在乘性不确定性情况下，使用多面体管道横截面限制不确定性。在研究 [42] 提出的动态管 MPC 中，横截面与部分状态和控制输入相关，从而允许管更灵活的变化，降低固定截面的保守性。研究 [43] 提出在线构造管来收缩状态和输入约束，虽然增加了在线计算量，但是所提框架能更好的处理不确定性，适用范围更广。

- 2) 基于 $\min - \max$ MPC: 当参数不确定性和附加扰动同时存在时，设计标准的 MPC 是比较困难的， $\min - \max$ MPC 是一种很好的解决方法。与基于管的 MPC 不同的是， $\min - \max$ MPC 是通过最小化最坏情况代价函数，同时满足所有可能的不确定性的约束获得控制输入 [44-46]。其基本原理是考虑所有可能的不确定性，对最坏情况的代价函数求最小值，其中约束的满足也是对于所有可能的不确定性。 $\min - \max$ MPC 可以分为开环 $\min - \max$ MPC [47-50] 和闭环 $\min - \max$ MPC [45-46, 51-53]。研究 [47] 针对输入饱和多面体不确定性系统，利用 $\min - \max$ MPC 产生鲁棒控制器使得系统稳定。研究 [49] 针对线性参数时变系统，提出了准 $\min - \max$ MPC 方法，将代价函数分成两阶段计算，第一阶段不涉及不确定性，从而减少算法保守性。研究 [50] 对多面体不确定性系统提出了一种参数依赖的开环 $\min - \max$ MPC，类似于反馈 MPC，所以一定程度降低了开环 $\min - \max$ MPC 的保守性。由于开环预测和较小的吸引域导致开环 $\min - \max$ MPC 保守性较大。如果将控制律 (而不是控制动作) 作为决策变量，预测的被控系统对扰动的影响做出反应，因此解的保守性较小，称为闭环 $\min - \max$ MPC，其能够提供更大的吸引域和更好的闭环性能指标。Raimondo 等人在 [46] 提出了一种用于非线性系统的新型 $\min - \max$ MPC 方案，以建立 ISpS 条件，用来确保闭环系统状态的显式上界。Hu 等人在 [51] 针对未知初始状态的离散时间系统提出输出反馈 $\min - \max$ MPC。Li 等人针对受约束的网络化控制系统提出了一种 $\min - \max$ 方法，其能有效地处理系统通信存在的时延和丢包。
- 3) 约束收缩法: 约束收缩方法的主要思想是将预测状态约束到一个逐渐收缩的集合。当系统存在不确定性时，由于状态受到约束，MPC 的迭代可行性 (优化问题解的存在性) 难以保证 (系统状态约束可能不满足)。如果系统的预测状态轨迹随着时间的推移而被约束到逐渐收缩的集合，那么状态在下一时刻能继续满足状态约束，进而保证 MPC 的迭代可行性。Marruedo 等人在 [54] 首次提出约束收缩法，基于系统的真实状态与预测状态之间的误差来建立约束收缩集。基于这样的思路，后续学者在研究 [55-58] 中逐渐

优化约束收缩策略，使其能应用更广泛。Li 等人在 [59-61] 针对受扰的非线性系统提出一种鲁棒约束，预测状态值的允许上界随时间逐渐减小。基于所提的鲁棒约束，MPC 的迭代可行性和系统的稳定性得以保证。

1.3 分布式模型预测控制原理及研究现状

1.3.1 分布式模型预测原理及分类

实际系统逐渐向大规模方向发展，研究对象分布区域逐渐扩大、子系统不断增多、系统间连接日益复杂（如车联网 [62] 和电力能源网 [63] 等）。针对这类系统，分布式模型预测控制有着广泛的应用，它通过对原始大规模优化问题进行分解来降低优化问题的规模，有效提高了计算效率。此外，允许子系统之间的信息交互促使系统的整体控制性能保持较优的水平 [64-65]。分布式模型预测控制主要有分散式结构和分布式结构。

1) 分散式控制结构如下图1.2所示，以两个子系统为例。分散式结构将系统分成若干个分散的子系统，针对每个子系统单独优化，局部控制器只求解子系统自身的局部优化问题，控制器之间没有信息交互，所以此结构适用于子系统之间无耦合或者耦合较弱的系统 [66-68]。以下简单说明分散式模型预测控制原理。对于每个子系统 i 来说，典型的分散式模型预测控制定义如下：

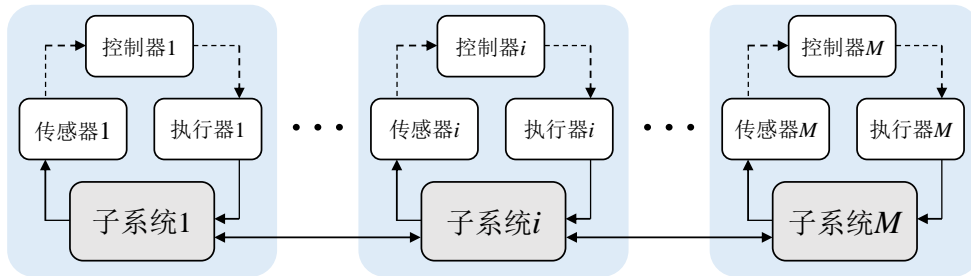


图 1.2 分散式控制结构

$$\min_{\mathbf{u}_i(k)} J_i(k) \quad (1.3a)$$

$$\text{s.t. } x_i(k+m+1|k) = f_i(x_i(k+m|k), u_i(k+m|k)) \quad (1.3b)$$

$$x_i(k|k) = x_i(k) \quad (1.3c)$$

$$x_i(k+m|k) \in \mathbb{X}_i \quad (1.3d)$$

$$u_i(k+m|k) \in \mathbb{U}_i \quad (1.3e)$$

$$x_i(k+N|k) \in \mathbb{X}_i^f. \quad (1.3f)$$

可以看出每个子系统 i 仅仅求解自身的局部优化问题且局部控制器之间没有信息交互。Magni 等人在 [69] 提出了一种用于受衰减扰动影响的非线性离散

时间系统的分散模型预测控制算法，在此算法中本地控制器之间不交换信息，闭环系统的稳定性依赖于每个 MPC 中的收缩约束。Raimondo 等人在 [70] 中，从输入到状态稳定性 (ISS) 的角度分析了分散式模型预测控制的稳定性。Alessi 等人在 [71] 中，在线性系统的背景下考虑了分布式控制器之间通信中可能出现的数据包丢失，并分析了它们对闭环系统稳定性的影响。由于分散式 MPC 局部控制器之间没有信息交互，所以并不能达到预期的控制性能，进而为了获得更好的控制性能，采用了分布式结构。

2) 分布式控制结构如下图1.3和图1.4所示。在分布式控制结构中，不同控制器之间有一定的信息交互，进而提升了控制性能 [72-73]。在分布式控制结构中，可以根据局部控制器优化问题中使用的成本函数进行分类。具体来说，可以将每个局部控制器优化一个局部代价函数的分布式算法称为非协作 DMPC 算法，将每个局部控制器优化一个全局代价函数的分布式算法称为协作 DMPC 算法 [74]。

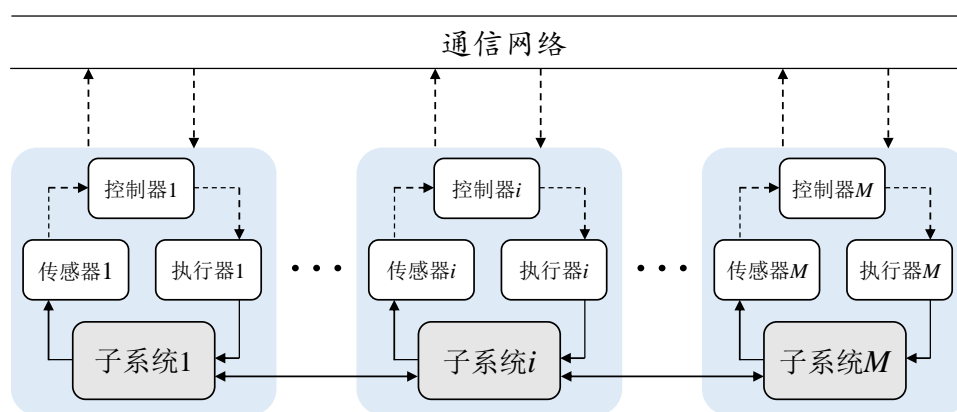


图 1.3 局部控制器位于本地的分布式控制结构

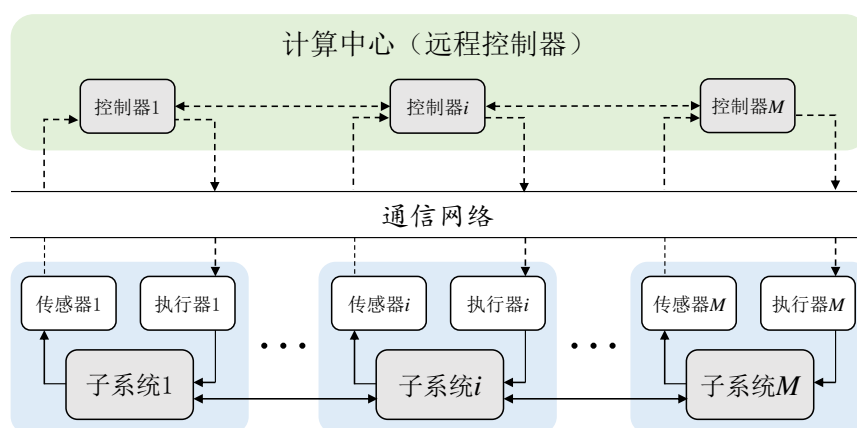


图 1.4 局部控制器位于远程的分布式控制结构

非协作 DMPC: 在非协作 DMPC 中，每个局部控制器只优化自身局部成本函数，其与分散式 DMPC 的区别在于分散式 DMPC 局部控制器求解自身局部优化问题时不考虑网络拓扑中其他子系统的信息，而非协作 DMPC 则会考虑网络

拓扑中邻居的信息，将邻居的信息作为自身局部优化问题的有益信息并加以利用 [75-76]。在大多数非协作 DMPC 中，局部控制器一般都是并行计算的，也就是各个子系统的优化问题是同时求解的。在一个采样时间内，控制器可能求解一次 (非迭代) 或多次 (迭代)。以下对于耦合系统定义一个优化问题，解释非协作 DMPC。对于子系统 i ，一般性局部优化可以定义如下：

$$\min_{\mathbf{u}_i(k)} J_i(k)$$

$$\text{s.t. } x_i(k+m+1|k) = f_i(x_i(k+m|k), u_i(k+m|k)) + \sum_j g_{ij}(x_j(k+m|k)) \quad (1.4a)$$

$$x_i(k|k) = x_i(k) \quad (1.4b)$$

$$x_i(k+m|k) \in \mathbb{X}_i \quad (1.4c)$$

$$u_i(k+m|k) \in \mathbb{U}_i \quad (1.4d)$$

$$x_i(k+N|k) \in \mathbb{X}_i^f. \quad (1.4e)$$

可以看出预测模型(1.4a)中含有子系统 i 的邻居 j 的信息，从而子系统之间存在信息交互。对于非耦合系统，信息交互一般体现在代价函数 $J_i(k)$ 中而非预测模型中，具体可以参考研究 [59-61]。

协作 DMPC: 非协作 DMPC 相对于分散式 DMPC 确实在控制性能上有所提升，但是相对于集中式 MPC，控制性能还是有所牺牲，所以学者在非协作 DMPC 的基础上进一步提升控制性能，进而研究协作 DMPC。协作 DMPC 的主要特点是在每个局部控制器中优化相同的全局代价函数。在协作 DMPC 中，每个控制器通过使用全局成本函数来考虑其输入对整个系统的影响。在每次迭代中，每个控制器在假设其邻居的输入都固定为事先确定值的前提下，优化自己的控制输入。然后，所有控制器共享求解得到的最优控制输入，当前时刻控制器的最终最优输入是当前优化问题的最优解与上一时刻最优输入的加权和。以下通过定义一个协作优化问题来解释协作 DMPC。

$$\min_{\mathbf{u}_i(k)} \sum_i J_i(k)$$

$$\text{s.t. } x(k+m+1|k) = f(x(k+m|k), u(k+m|k)) \quad (1.5a)$$

$$x_i(k|k) = x_i(k) \quad (1.5b)$$

$$x(k+m|k) \in \mathbb{X} \quad (1.5c)$$

$$u_i(k+m|k) \in \mathbb{U}_i \quad (1.5d)$$

$$u_j(k+m|k) = u_j^{c-1}(k+m|k), j \neq i \quad (1.5e)$$

$$x_i(k+N|k) \in \mathbb{X}_i^f. \quad (1.5f)$$

可以看到在每次迭代 c ，每个控制器 i 知道整个系统动态并求解一个全局代价函数。在控制器求解得到最优解 $u_i^*(k+m|k)$ 后，在当前迭代 c 最优输入构造为：

$$u_i^c(k+m|k) = \alpha_i u_i^{c-1}(k+m|k) + (1 - \alpha_i) u_i^*(k+m|k)$$

其中 α_i 是每个子系统的权重系数。

1.3.2 分布式模型预测研究现状

对于分布式模型预测控制的研究可以追溯到上世纪 90 年代 [77-78]。根据子系统动态之间是否耦合，我们将系统分为耦合系统和非耦合系统。以下针对这两类系统的分布式模型预测控制的成果阐述研究现状。

非耦合系统的分布式模型预测控制中子系统之间没有物理互联，子控制器之间存在信息交互。在给定约束的情况下，通过优化和协调完成最终的目标。为了达到最终的目标，局部优化问题中的优化指标通常包含子系统自身的信息以及其邻居的信息，优化得到的结果通过信息交互实现与邻居系统的协调。Dunbar 等人在 [79] 中针对多车辆编队系统提出非协作 DMPC 方法，每个局部优化问题的代价函数中包含了邻居的预测状态信息，并引入了兼容性约束，从而保证了优化问题的迭代可行和整个车辆系统的一致。Wang 等人在研究 [80] 中将 [79] 中的结果拓展到非完整车辆系统，通过使用兼容性和避碰约束来避免车辆碰撞。此外，由于非完整车辆的线性化是不稳定的，构造了新的终端约束和非线性辅助控制器实现控制目标。Li 等人在 [81] 中研究了线性多智能体的一致性，提出了一种新的 DMPC 策略，使得每个多智能体在每个时刻只和其邻居交换一次状态信息，进而比需要多次交换信息的研究 [79-80] 更有效地节约了通信资源，并且证明了在此策略中一致性拓扑可以通过求解局部优化问题显式的表达。Gao 等人在 [82] 中针对动态解耦的非线性系统，提出了一种协作 DMPC 策略。子控制器的优化指标包括局部动力学设计的跟踪项以及子系统本身状态和邻居状态的偏差项。在优化问题中添加了限制预测状态和假设状态之间偏差的一致性约束，以实现稳定性。Wang 和 Duan 等人在 [83] 针对单积分和双积分多智能体系统提出 DMPC 算法，该算法同时优化一致性状态和控制输入，与固定端点的 DMPC 研究 [82] 相比具有更大的优化空间（解的空间更大）。

近些年不仅在理论上对 DMPC 的研究取得了重要成果，在实际应用中，DMPC 也受到广泛关注。Yang 等人在 [84] 中研究了一种基于新型低阶模型的多级带式输送机系统分布式经济模型预测控制方法。该方法利用相邻传送机的状态信息来表示局部优化控制问题的协同代价函数，提高了系统的经济性能，降低了能耗。Nawaz 等人在 [85] 中提出基于 DMPC 的多微电网能量调度问题，引入新的松弛变量作为优化变量，在考虑电池退化的情况下将电池电量状态限制

在最优范围内。在此基础上,提出了基于加速分布式增强拉格朗日的分布式协调策略,通过各微电网之间的协调合作来实现能量交换,从而提高供电可靠性,实现单个微电网的供需平衡,并减少电池退化以延长循环寿命。Shen 等人在 [86] 中研究了自主水下航行器的轨迹跟踪控制,提出了新的非线性 DMPC 算法,证明了在子问题中提出的收缩约束可以保证自主水下航行器轨迹的收敛性,进一步开发了一种实时 DMPC 算法,实现了控制性能和计算复杂度的平衡。

实际许多大型系统是耦合系统,例如智能电网 [87]、化工过程 [88]、城市配水系统 [89] 等。耦合系统的特点是指子系统之间质量或者能量相互作用。子系统的演化直接受到邻居系统的影响,增加了控制难度,尤其是对于强耦合系统。这种情况下的 DMPC 设计应特别重视对耦合项的处理。虽然邻居的信息在上一次执行时刻已经传输到子系统中,但是由于并不能传输未来时刻的真实信息,所以子系统只能对邻居信息进行预测,而预测误差会影响算法的可行性,并进一步降低全局性能。研究者对耦合项的处理采用了不同的方法,有的学者将耦合项当成外部扰动处理,例如 [90-92]。Jia 等人在 [90] 中研究了耦合非线性系统,每个控制器将来自其他子系统的信号视为其局部模型的扰动输入,进而采用基于 min-max 的 DMPC 策略来处理耦合项,给出了算法可行和系统稳定的充分条件。Liu 等在 [91] 针对非线性弱耦合系统提出了鲁棒 DMPC 策略,通过在局部优化问题中引入一个新型鲁棒约束同时处理扰动和耦合项,进而保证了算法迭代可行性和系统的稳定。Riverso 等在 [92] 提出基于管的 DMPC 方法,其采用稳定反馈控制律来抑制耦合和外部扰动导致的预测状态和实际状态之间的偏差,从而降低了保守性。将耦合当做扰动来处理使得子系统之间没有信息交互,从而牺牲了部分控制性能。因此,有的学者在优化问题中考虑耦合项导致的影响,这样子系统之间存在信息交互,从而提升控制性能,例如 [93-95]。Dunbar 等人在 [93] 研究了动态耦合非线性系统的 DMPC 算法。在此算法中,优化问题的预测模型考虑了邻居系统的状态信息,提出的兼容性约束使得预测状态轨迹与假设的状态轨迹相近,从而保证了算法的迭代可行性。Zheng 等在 [96] 中对耦合线性系统提出新的 DMPC 框架,其中子系统的局部优化问题不仅考虑了子系统自身的性能,而且考虑了相邻子系统的性能。在优化中,每个局部控制器不仅考虑来自其邻居的影响,还考虑了控制应用到其邻居造成的影响,以提高全局性能。Long 等人在 [97] 中针对线性耦合系统提出了基于压缩理论的 DMPC 方案,利用压缩理论估计状态预测误差,与之前对于耦合系统使用 Lipschitz 条件的研究相比,保守性更低,允许更强的耦合度。

DMPC 在耦合系统的应用方面也比较广泛,例如针对暖通空调系统,Ma 等人在 [98] 提出了一种优先级协调的 DMPC,该策略由优先级协调层和较低的 DMPC 层组成。在协调层,提出了一种具有优先级的热边界计算机制用于调整

DMPC 的热边界, 解决子系统竞争资源时的资源分配问题, 在满足热舒适性的同时降低了运行成本。Alejandro 等人在 [99] 中针对智能电网采用了基于拉格朗日的 DMPC 策略, 解决了电网中环境与经济联合调度的问题。此外还有城市配水系统 [89]、苯催化烷基化工艺 [100] 等的应用。

1.4 基于事件驱动模型预测控制

1.4.1 基于事件驱动模型预测控制研究现状

MPC 中优化问题的计算需要消耗计算资源, 并且在网络化控制架构下, 求解得到的信息需要通过网络传输进而消耗通信资源。传统时间驱动的控制方式无疑会导致资源的浪费, 甚至在一些资源受限的场景中难以实施 MPC 算法。与时间驱动的控制方法相比, 基于事件驱动的控制可以降低控制动作的执行频率, 同时可以保持预期的控制性能。原因是在事件驱动中控制动作只在事先定义的良好事件发生时才会执行, 从而降低计算和传输的频率 [101]。基于事件驱动的控制主要可以分为两类: 事件触发控制 (Event-Triggered Control) 和自触发控制 (Self-Triggered Control)。基于事件驱动的控制设计的核心是触发条件的设计。根据设计的条件可进一步将事件触发控制分为: 静态事件触发 [102], 动态事件触发 [103], 混合事件触发 [101], 自适应事件触发 [104]。将 MPC 与事件触发控制/自触发控制结合进而形成事件触发 MPC (Event-Triggered MPC, ET-MPC) / 自触发 MPC (Self-Triggered MPC, ST-MPC), 可以有效的降低计算和通信负载。

在 ET-MPC 中, 一般设计一个与状态有关的触发条件, 然后在每个时刻去检测触发条件是否满足。只有当触发条件满足时, 控制器才更新状态信息并求解 OCP, 求解得到的最优信息将被传输到执行器端。所以触发条件的设计尤其重要, 关乎资源和控制性能之间的平衡。根据事件触发条件的设计, ET-MPC 可以分为静态 ET-MPC [61, 105-108]、动态 ET-MPC、混合 ET-MPC [109-110]。根据触发条件设计原则分为两类。1) 为了保证 MPC 算法的迭代可行性。这类触发条件一般基于预测状态和真实状态之间的偏差, 例如 [105-108, 110]。Wang 等人在 [106] 中针对非线性离散时间受扰系统提出了两种事件触发策略, 一种基于可行性的关于状态预测误差的单模触发策略, 一种是基于可行性的双模触发策略。进一步地, 为了更充分降低触发频率, 节约计算资源, 其在 [110] 中针对连续时间非线性系统提出混合 ET-MPC 策略, 触发阈值由一个与状态相关的函数和一个固定常值组成, 其验证了此策略能更有效地降低触发频率。Hashimoto 等人在 [107] 提出了事件触发采样方案, 在此方案中预测时域是自适应的, 触发阈值是与预测时域相关的。一方面逐渐减小的预测时域能降低计算量, 另一方面可变的触发阈值能有效减少触发频率, 从而节约计算和通信资源。基于研究 [107], Sun

等人针对独轮机器人的跟踪问题提出了自适应预测时域的 ET-MPC 方法, 通过衰减的预测时域, 降低了触发频率, 实现了机器人跟踪目标的同时降低了 MPC 的计算负载。2) 另一类是基于系统稳定性。这类触发条件一般是基于设计一个递减的 Lyapunov 函数, 从而保证系统的稳定, 例如研究 [111-113]。早期 Eqtami 等人在 [111] 基于系统的 ISS 稳定, 提出了包含状态测量误差的稳定性触发条件, 并将此方法拓展到 MPC 中, 形成了基于稳定性触发条件的 ET-MPC。注意到对于连续系统, 连续地检测触发是难以实现的。于是 He 等人在 [113] 中针对采样数据系统提出了基于非单调 Lyapunov 函数的 ET-MPC 方法, 触发条件只在采样时刻检测。ET-MPC 的触发条件中一般会涉及状态预测误差, 所以如果系统的不确定性较大则会导致触发频繁。针对此问题, Yoo 等人在 [112] 中提出了基于统计学习的不确定补偿 ET-MPC 策略, 进而有效减小不确定性的影响, 更有效地降低触发频率。注意到在 ET-MPC 中, 触发条件需要周期性或者连续地监测造成了一定的传感器负载。为此, 研究学者提出了 ST-MPC 方案。

ST-MPC 根据当前触发时刻获得的测量值提前确定下一个触发时刻, 因此不需要监测触发条件是否满足, 并且优化问题的求解和信息的传输只发生在触发时刻, 从而降低计算/通信负载。自触发条件的设计主要也是基于 MPC 算法迭代可行性和系统稳定性, 根据触发间隔的确定方式, 我们可以将 ST-MPC 分为两类。1) 根据系统状态和输入等信息建立等式/不等式确定, 如 [56, 114-115]。Cui 等人在 [114] 中基于优化问题迭代可行性对非线性信息物理系统提出了双模 ST-MPC 策略, 即在终端约束内外触发策略不同, 验证了此策略比传统策略更有效地降低了通信负载。Hashimoto 等人在 [115] 中针对非线性输入仿射网络化控制系统提出了一种自适应控制采样的 ST-MPC 方案, 一方面自适应的控制采样解决了连续的控制信号不能在有限的带宽下发送到被控对象的问题; 另一方面基于稳定性设计的触发条件使得在保证系统稳定的同时降低了通信负担。Li 等人针对受扰的非线性输入仿射系统, 提出了一种扰动估计的 ST-MPC 方案, 同时基于可行性和稳定性设计自触发条件。由于扰动估计的使用, 预测误差有效减小, 从而更有效的降低触发频率。2) 触发间隔作为决策变量在优化问题求解中确定。此类方法可以在考虑通信代价的同时平衡控制性能。Henriksson 等人在 [116] 中针对线性系统的 ST-MPC, 提出新型代价函数, 其既包含控制性能又包含触发间隔(模拟通信代价)。在每个触发时刻, 控制器不仅求解最优控制输入也决定着下一个触发时刻, 从而很好地平衡通信负载和控制性能。Liu 等人在 [53] 中提出了基于 min-max 的 ST-MPC 算法, 利用 min-max MPC 的框架处理了外部扰动, 同时设计了新的代价函数。在此基础上通过优化引入自触发策略, 将触发间隔引入优化中, 降低通信负载的同时考虑了控制性能。Li 等人在 [117] 中研究了约束离散非线性的 ST-MPC, 提出了一种新的自触发方案。在此方案中通信代价被显式地

加入了整体代价函数中,优化问题同时优化触发间隔和控制输入,从而同时考虑了通信代价和控制性能。

1.4.2 基于事件驱动的分布式模型预测控制研究现状

通信网络,尤其是无线网络的引入,给 DMPC 带来了好处,即通过网络进行信息交换有利于 DMPC 实现全局的控制目标,但是也给 DMPC 设计带来了挑战。一些实际情况,如电池供电或网络带宽受限,实际无线节点无法承受大量通信负载,可能会导致通信中断,从而控制性能降低甚至失稳 [60]。因此,如何设计一种控制策略使得在保证所需控制性能前提下使用较少的通信资源是有研究意义的。基于事件驱动 MPC 的思想,事件驱动 DMPC 应运而生,并被广泛研究以降低计算和通信成本。在事件驱动 DMPC 中,每个子系统的控制器只在触发时刻被激活并接收其邻居的信息,同时将其更新的状态传播到相邻子系统。所以事件驱动 DMPC 可以有效降低计算和通信负载。与事件驱动 MPC 类似,可以将事件驱动 DMPC 分为事件触发 DMPC (Event-Triggered DMPC, ET-DMPC) [60, 118-120] 和自触发 DMPC (Self-Triggered DMPC, ST-DMPC) [121-125]。需要注意的是因为子系统之间需要信息交互,单个系统的 ET-MPC/ST-MPC 并不能直接拓展到 ET-DMPC/ST-DMPC。

目前已经有较多关于 ET-DMPC 的研究,采用事件触发可以降低传输和计算的频率,进而不仅可以降低通信负载,同时也可以降低计算负载。针对非线性非耦合系统, Li 等人在 [60] 中提出了非周期的 ET-DMPC 方法,采用非协作 DMPC 方案,将邻居的信息置于局部优化问题的代价函数中从而达到信息交互目的,基于迭代可行性建立触发条件进而达到非周期触发的目标。注意到 [60] 中触发条件的检测是周期进行的,为了进一步降低通信负载, Zhan 等人在 [119] 中提出了自适应 ET-DMPC 算法,该算法采用自适应确定触发间隔的非周期检测策略,进一步降低了通信和计算成本以及传感器负载。为了降低触发阈值相对固定导致的触发结果的保守性, Zou 等人在 [118] 提出了动态事件触发机制,设计了考虑邻居信息的动态触发条件,最终验证了此机制可以得到更大的触发间隔,进而更有效降低通信和计算负载。为了考虑系统全局控制性能, Mi 等人在 [120] 提出了新的 ET-DMPC 方案。此方案将关于邻居系统的性能代价加入到子系统本身的代价函数中构成组合代价函数,构造了新的 Lyapunov 函数进而基于稳定性设计了触发条件,提升了系统的全局控制性能。

ST-DMPC 的设计原理类似于 ST-MPC,主要是基于优化问题的迭代可行性和系统的稳定性,但是需要充分考虑信息交互对可行性和稳定性的影响。Hu 等人在 [122] 针对多智能体系统群体,提出了一种 ST-DMPC 算法。群体中的所有智能体都具有自适应确定采样时间的能力,以减少通信和控制更新中不必要的

能量消耗。为了自适应确定采样时间,在保证 Lyapunov 函数减小的前提下,设计了一种自触发算法,进而达到群体协作移动目的的同时降低通信资源消耗。Zhan 等人在 [121] 中将研究 [116] 中 ST-MPC 算法拓展到分布式情况,研究了分布式多智能体一致性,提出了 ST-DMPC 一致性算法,该算法将控制输入和触发间隔同时放于优化问题中,进而同时考虑了控制性能和通信代价。注意到为了达到一致,[121] 中的策略需要在每次更新时刻将整个预测状态轨迹发送给其邻居,造成了一定的通信消耗。为了进一步节约通信资源, Mi 等人在 [123] 中提出了新的 ST-DMPC 算法。该算法一方面将通信代价显式地加入到代价函数中进行优化,另一方面在每个更新时刻只需要将当前状态和输入发送到邻居系统,所以在平衡控制性能和通信代价的同时进一步降低了通信负载。上述考虑的都是同构系统,对于异构系统设计自触发算法还是具有挑战。为此, Li 等人在 [124] 中针对异构时变多智能体系统,提出了 ST-DMPC 一致性算法,实现了触发间隔与控制输入同时优化,并分析了其对系统性能的影响。对于非线性多智能体系统, Hashimoto 等人在 [125] 中提出了基于稳定性设计的自触发算法,通过改变候选 Lyapunov 函数的形式(传统方法选取最优值函数作为候选 Lyapunov 函数)推导了一个不涉及邻居信息的触发条件,因此不需要定期地传送邻居信息,降低通信负载。

1.5 本文研究内容和组织结构

本节主要总结现有 DMPC 的事件驱动策略设计和分析框架中所存在的问题,进而阐述本文所要研究的内容和对应的解决方案。

1.5.1 研究问题总结

综合 DMPC 的事件驱动策略设计研究可以发现总体的设计原则是基于局部优化问题的可行性和系统的稳定性,现将这两个设计路线中存在的问题凝练如下:

- **基于稳定性分析和设计触发策略存在的问题:** 基于系统稳定性设计触发策略的主要思路是选取一个候选的 Lyapunov 函数(通常是优化问题的最优值函数),通过使得 Lyapunov 函数递减的方式确定控制参数或设计触发条件。这样会导致两方面结果:(1)传统的稳定性分析方法使得控制参数设计过于保守,事件频繁触发。利用 Lyapunov 函数递减的方式分析稳定性需要计算不同时刻的 Lyapunov 函数之差(或导数),而由于计算过程中频繁使用了高保守的不等式进行放缩,最终导致设计的保证稳定性的控制参数非常保守,进而触发频繁;(2)由邻居信息的非精确可知引起的估计误差

累积会导致触发条件很容易满足。触发使得子系统之间信息交流异步，子系统不能得到其邻居真实信息，则邻居信息的估计误差会随触发累积，所以导致包含此估计误差项的稳定性触发条件易满足，事件频繁触发。因此，对基于稳定性设计触发策略的方法，如何减少由上述两个方面带来的频繁触发是本文拟解决的两个关键问题。

- 基于可行性分析和设计触发策略存在的问题:** 基于可行性设计触发策略的主要思路是基于系统的状态预测误差，进而给出状态预测误差允许的阈值来保证优化问题的可行性。现有研究主要有以下两方面局限：（1）预测模型的不精准导致状态预测误差偏大。由于模型受到外部扰动的影响，使得传统以标称模型（去扰动模型）预测系统状态的预测偏差过大，进而导致事件频繁触发。即使有少量研究考虑增加预测模型精度，但是由于分布式优化问题中融入了其他邻居的信息使得针对单个系统的研究难以拓展到分布式系统中；（2）系统动态互联导致状态预测误差难以估计。状态预测误差的估计依赖于系统动态，而在动态耦合的系统中，子系统的真实轨迹包含其邻居的轨迹，而邻居的轨迹非实时可知，所以在动态互联的系统中状态预测误差难估计，触发策略难设计。因此，对于基于可行性设计触发策略的方法，如何解决上述两种情况存在的局限是本文拟解决的另外两个关键问题。

1.5.2 研究内容

综合上述凝练的现有研究框架中存在的问题，现给出本文的四个主要研究内容以及解决现存问题所采用的方法，本文的整体研究框架如图1.5所示：

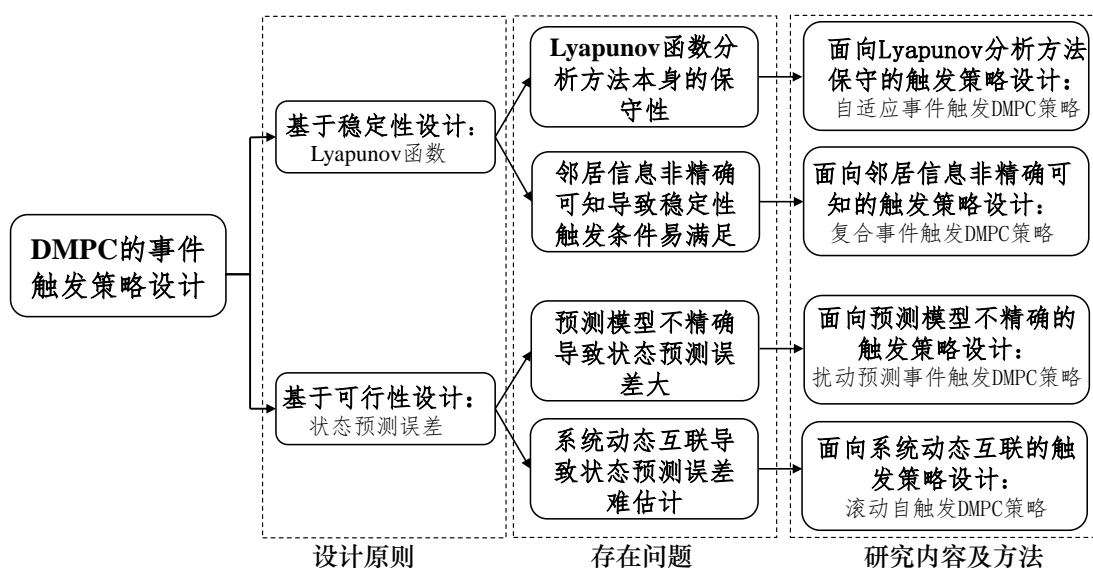


图 1.5 本文整体研究框架

- **面向 Lyapunov 分析方法保守的触发策略设计：**利用 Lyapunov 方法分析稳定性导致控制参数设计保守。对此，可行的解决思路是避开 Lyapunov 方法分析稳定性。为此，本文提出了自适应 ET-DMPC 策略。首先，设计了自适应时域触发条件，保证了优化问题的可行性。其次，设计了衰减的预测时域，当预测时域减为零时，每个智能体都会在有限的时间进入终端约束集。本文提出的衰减预测时域保证了稳定性，避开了传统的稳定性分析方法，减小了用 Lyapunov 方法分析稳定性导致的控制参数设计保守性，从而高效地节约计算和通信资源。
- **面向邻居信息非精确可知的触发策略设计：**邻居信息的非精确可知导致估计误差累积，使得基于 Lyapunov 函数递减原则设计的触发条件易满足，触发频繁。对此，可行的解决思路是设计触发条件不再强制 Lyapunov 函数递减。为此，本文提出复合 ET-DMPC 策略。首先，基于系统 Lyapunov 稳定设计了一个 Lyapunov 稳定性触发条件。其次，设计了另一个与邻居估计信息无关的稳定性条件。二者以并行触发的方式使得 Lyapunov 函数不再递减，解决了传统采用单一稳定性触发条件导致的频繁触发问题。
- **面向预测模型不精确的触发策略设计：**利用受扰系统的标称模型作为局部优化问题中的预测模型使得预测系统未来行为不精准，真实状态与预测状态之间的偏差过大就会导致触发条件易满足而频繁触发。对此，使用更高精度的预测模型是可行的方案。为此，本文提出基于扰动预测的 ET-DMPC 策略。首先，提出基于中心路径的扰动预测方法，预测了扰动的未来变化，基于此，预测模型中融入了扰动预测项，进而提高了预测模型的精度，减少了预测偏差。其次，针对不确定性引起的状态约束难以满足问题，设计了一种基于扰动变化率的约束收缩集合，进而保证了真实状态约束的满足。
- **面向系统动态互联的触发策略设计：**子系统之间的动态耦合导致状态预测误差难以估计，从而难以设计基于此估计误差的自触发策略。并且传统针对耦合系统的研究需要在优化问题中设计额外的约束，进一步增加了设计难度，而基于解耦模型的设计相对简单。因此，优化问题中融入解耦模型是一种解决方案。为此，本文提出了滚动 ST-DMPC 策略。首先，提出了一种双模型优化方案，即用解耦的模型估计了状态预测误差，简化了优化问题和触发条件的设计，避免了耦合项导致的多个约束；用耦合的模型提高了预测精度优化了控制性能。其次，设计了一种滚动自触发机制，在触发间隔内采样状态得到实时的状态预测误差，从而有效地解决了状态误差保守估计导致的频繁触发问题。实现了算法设计简单且计算和通信负载低的目标。

1.5.3 本文组织结构

全文总共六个章节，整体的组织结构如图所示：

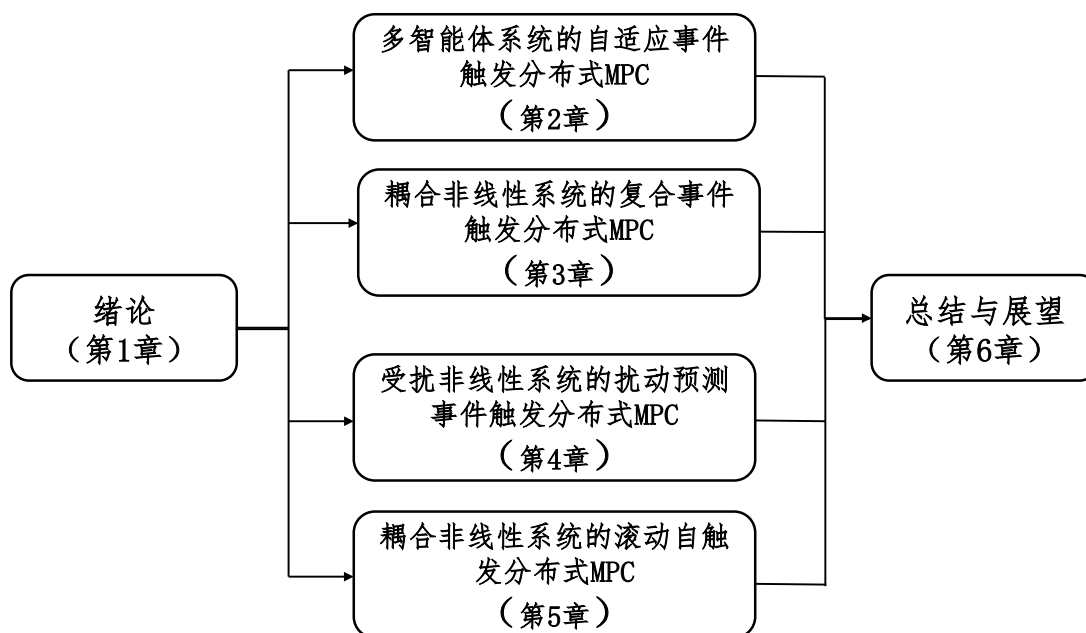


图 1.6 本文组织结构

第1章，绪论。主要包括研究背景及意义、模型预测控制原理及国内外研究现状、基于事件驱动的分布式模型预测原理及国内外研究现状、本文主要研究内容以及本文组织框架。

第2章，多智能体系统的自适应事件触发分布式模型预测控制。具体包括基于自适应预测时域的优化问题设计，利用衰减的预测时域分析多智能体系统的一致性，以及算法的仿真验证。

第3章，耦合非线性系统的复合事件触发分布式模型预测控制。具体包括基于优化问题可行性设计了一个触发条件，基于稳定性设计了两个并行触发条件，以及算法有效性的仿真验证。

第4章，受扰非线性系统的扰动预测事件触发分布式模型预测控制。具体包括针对一般受扰非线性系统提出了一种中心路径扰动预测方法，在预测模型中融合此扰动预测形成了精度高的预测模型，并基于此方法研究了特殊的仿射非线性系统，以及算法的仿真验证。

第5章，耦合非线性系统的滚动自触发分布式模型预测控制。具体包括一种双模型局部优化问题的设计，一种新型的滚动自触发策略的提出，以及算法有效性的仿真验证。

第6章，总结与展望。总结了全文的研究工作和贡献并对后续可能的工作展望。

第 2 章 多智能体系统的自适应事件触发分布式 MPC

2.1 引言

基于分布式模型预测控制的多智能体研究受到越来越多的关注，例如编队问题 [79]，多智能体一致性 [81]，集群问题 [122]。其中一致性问题是一个比较重要的研究问题，一致性是多个通过物理结构或者通信网络连接的系统经过一段时间最终系统的某些状态趋于相等。多智能体一致性在许多实际方面得到应用，如无人机、水下自主航行器等。所以本章研究基于分布式模型预测控制的多智能体一致性具有理论和实际意义。

基于分布式模型预测控制的多智能体系统为了更好的达到整体系统的一致性，子系统之间通过网络进行信息交互，进而对网络有一定要求。另外，通过求解优化问题得到系统的控制输入，进而需要消耗计算资源。一些应用场景需要在完成控制目标的同时尽可能地节约计算和通信资源，例如水下自主航行器的协同工作。对此 ET-DMPC/ST-DMPC 是一种好的解决方案。如第一章基于事件的分布式模型预测控制调研现状所示 [118-120]，现阶段基于 ET-DMPC/ST-DMPC 的多智能体研究大都是研究系统的稳定性，而研究一致性相对较少。Zhan 等人在 [121] 中基于 ST-DMPC 研究了线性多智能体的动态一致性。Yang 等人在 [126] 中针对同构多智能体系统的形成和跟踪问题，提出了 ET-DMPC 算法。对于每个智能体，基于邻居的假设信息，从稳定性分析中推导出事件触发条件。作者在 [126] 中考虑到假设信息与真实预测信息之间的偏差，为局部优化问题设计了时变兼容性约束，从而保证算法的迭代可行性。以上基于 ET-DMPC 多智能体一致的研究存在以下不足：1) 多智能体的一致性分析都是利用局部优化问题的最优值函数当作 Lyapunov 函数从而基于 Lyapunov 稳定性分析的，利用 Lyapunov 稳定性分析方法保证系统一致性设计的控制参数过于保守，导致频繁触发；2) 为了保证系统一致性，在上述两个研究中都加入了时变的兼容性约束，然而这样的约束减小了优化问题解的可行域；3) 实际系统中通常存在外部扰动，扰动的存在使得系统约束难以满足，然而目前多智能体一致性研究中并没有考虑扰动的影响；4) 算法都基于固定预测时域，不能充分降低计算和通信负载。

综上所述，本章基于 ET-DMPC 研究多智能体一致性问题，旨在使得整体系统达到一致的同时，有效地降低计算和通信负载。为此，我们提出了一种自适应时域的 ET-DMPC 算法。具体而言，设计出依赖可变预测时域的触发条件，可以有效降低触发频率和计算复杂度，达到降低计算和通信负载的目的。其次，定义了新的局部优化问题。在此优化问题中，一方面构造了新的收缩约束，使得在外部扰动存在的情况下，状态约束依旧满足；另一发面，避开了兼容性约束，使得

优化问题的可行域范围扩大。最后，建立新的稳定性分析框架。基于可变的预测时域分析了系统的稳定性，相对于传统利用 Lyapunov 函数分析系统一致性保守性更低，控制参数设计更灵活，进一步降低了触发频率。

本章节主要安排如下。第2.2节阐述了本章节的具体研究问题。第2.3节提出了自适应 ET-DMPC 算法，具体包括新型局部优化问题的具体定义和触发策略的设计方法分析。第2.4节分析了基于所提 ET-DMPC 策略下算法的迭代可行性和多智能体系统的一致性。第2.5节通过多车辆系统验证了所提策略的有效性。最后给出了本章研究工作的总结。

2.2 问题描述

考虑由 M 个智能体组成的多智能体系统, 第 i 个智能体的系统动态方程为:

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k) + w_i(k), k \geq 0, \quad (2.1)$$

其中 $i = 1, \dots, M$, $(A, B) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m}$ 。智能体 i 的状态 $x_i(k) \in \mathbb{R}^n$, 控制输入 $u_i(k) \in \mathbb{R}^m$ 和外部扰动 $w_i(k) \in \mathbb{R}^n$ 分别受到以下约束:

$$x_i(k) \in \mathbb{X}_i, u_i(k) \in \mathbb{U}_i, w_i(k) \in \mathbb{W}_i, \quad (2.2)$$

其中, 状态约束 \mathbb{X}_i 和控制约束 \mathbb{U}_i 是包含原点的紧集, 外部扰动集 $\mathbb{W}_i \triangleq \{w_i \in \mathbb{R}^n : \|w_i\|_{P_i} \leq \rho_i\}$, 常数 $\rho_i > 0$ 表示扰动的上界。

智能体需要跟踪虚拟参考信号的动态方程为:

$$x_r(k+1) = Ax_r(k). \quad (2.3)$$

为了表示(2.1)中的多智能体系统的通信拓扑, 定义图 $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$, 其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, M\}$ 是顶点集, $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) : i, j \in \mathcal{V}, j \neq i\}$ 是边集, $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{M \times M}$ 是邻接矩阵。若智能体 i 能收到智能体 j 的信息, 则称智能体 j 是智能体 i 的邻居, 此时 $a_{ij} = 1$; 否则 $a_{ij} = 0$ 。用 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V}, a_{ij} = 1\}$ 表示智能体 i 的邻居集。

基于上述准备, 下面给出多智能体系统(2.1)的跟踪一致性定义。

定义 2.1 ([127]) 考虑具有通信拓扑 \mathcal{G} 的受扰多智能体系统(2.1)。给定初始条件 $x_i(0), i \in \mathcal{V}$, 如果智能体与参考信号之间的状态差满足:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_i(k) - x_r(k)\| \leq \delta, \forall i \in \mathcal{V}, \quad (2.4)$$

其中 δ 是一个可调参数, 则称多智能体系统(2.1)达到跟踪一致。

假设 2.1 系统(2.1)是可控的。

本章的研究目标是设计一个 ET-DMPC 算法使得(2.1)中的多智能体系统在满足(2.2)中的系统约束下达到定义中的跟踪一致性, 同时避免传统分析方法带来的保守性, 进而降低分布式模型预测控制的计算和通信资源消耗。

2.3 自适应事件触发分布式模型预测控制策略设计

本节给出所提的自适应 ET-DMPC 方法，具体包括分布式优化问题的定义和自适应事件触发策略的设计。

2.3.1 分布式优化问题

在多智能体的分布式模型预测控制中，各个智能体之间通过信息交换以获得更好的控制性能 [59]，但是智能体 i 在当前优化问题的求解时刻并不能获得其邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 的未来预测状态信息，因此智能体 i 只能假设其邻居 j 的行为。为了更好地描述每个智能体 i 的行为，定义以下符号。

由于采用事件触发策略，每个智能体的信息更新时刻可能是异步的，也就是说，每个智能体的优化问题可能在不同的触发时刻求解。为了描述智能体的行为，定义序列 $\{k_i^l, l \in \mathbb{N}\}$ 表示智能体 i 的第 l 个触发时刻。基于定义的触发时刻，每个智能体 $i, i \in \mathcal{V}$ 的不同状态和控制输入轨迹描述如下：

- $\hat{u}_i(k_i^l + m | k_i^l), \hat{x}_i(k_i^l + m | k_i^l), m \in \mathbb{N}$: 分别是智能体 i 在当前触发时刻 k_i^l 对 $k_i^l + m$ 时刻的预测控制输入和预测状态轨迹；
- $\hat{u}_i^*(k_i^l + m | k_i^l), \hat{x}_i^*(k_i^l + m | k_i^l)$: 分别是智能体 i 在当前触发时刻 k_i^l 求解优化问题得到的最优控制输入和对应的最优状态轨迹；
- $x_i^a(k_i^l + m | k_i^l)$: 智能体 i 的假设状态轨迹，其具体形式将在下面内容定义。

基于上述定义，对于每个智能体 i ，在时刻 $k = k_i^l$ ，其控制输入通过求解以下局部 OCP 产生：

$$\begin{aligned}
 & \min_{\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^l)} J_i(x_i(k_i^l), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^l), \mathbf{x}_j^a(k_i^l), N(k_i^l)) \\
 & s.t. \hat{x}_i(k_i^l | k_i^l) = x_i(k_i^l) \\
 & \hat{x}_i(k_i^l + m + 1 | k_i^l) = A\hat{x}_i(k_i^l + m | k_i^l) + B\hat{u}_i(k_i^l + m | k_i^l) \\
 & \hat{x}_i(k_i^l + m | k_i^l) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m) \\
 & \hat{u}_i(k_i^l + m | k_i^l) \in \mathbb{U}_i \\
 & \hat{x}_i(k_i^l + N(k_i^l) | k_i^l) \in \mathbb{X}_i^f,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

其中 \ominus 表示的是庞特里亚金差集符号， $m = 0, \dots, N(k_i^l) - 1$ ， $N(k_i^l)$ 是在 k_i^l 时刻的预测时域。 $\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^l) = \{\hat{u}_i(k_i^l | k_i^l), \dots, \hat{u}_i(k_i^l + N(k_i^l) - 1 | k_i^l)\}$ 是预测控制输入序列。类似地，对应的预测状态轨迹为 $\hat{\mathbf{x}}_i(k_i^l) = \{\hat{x}_i(k_i^l | k_i^l), \dots, \hat{x}_i(k_i^l + N(k_i^l) | k_i^l)\}$ 。在触发时刻 k_i^l 求解上述局部 OCP 得到最优解 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k_i^l)$ 和与之对应的最优预测状态轨迹 $\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^l)$ 。 \mathbb{X}_i^f 是终端约束集，定义为终端预测状态与参考信号 x_r 的差，即

$$\mathbb{X}_i^f \triangleq \left\{ x_i \in \mathbb{R}^n : \|x_i - x_r(k_i^l + N(k_i^l))\|_{P_i} \leq \alpha \varepsilon_i \right\}, \tag{2.6}$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $\varepsilon_i > 0$ 。

以下部分定义优化问题(2.5)中假设状态和收缩集等的具体形式。

- $\mathbf{x}_j^a(k_i^l) = \left\{ x_j^a(k_i^l|k_i^l), \dots, x_j^a(k_i^l + N(k_i^l)|k_i^l) \right\}$ 是智能体 j 的假设状态轨迹。设计如下：

$$x_j^a(k_i^l + m|k_i^l) = \begin{cases} x_j^*(k_i^l + m|\eta_j(k_i^l)), m = 0, \dots, \eta_j(k_i^l) + N(\eta_j(k_i^l)) - k_i^l \\ Ax_j^a(k_i^l + m - 1|k_i^l) + Bu_j^a(k_i^l + m - 1|k_i^l), \\ m = \eta_j(k_i^l) + N(\eta_j(k_i^l)) - k_i^l + 1, \dots, N(k_i^l), \end{cases} \quad (2.7)$$

其中 $\eta_j(k_i^l) \triangleq \max \left\{ k_j^l : k_j^l < k_i^l, l \in \mathbb{N} \right\}$ 表示智能体 j 距离智能体 i 的触发时刻 k_i^l 最近的触发时刻。 $u_j^a(k_i^l + m - 1|k_i^l) = K_j(x_j^a(k_i^l + m - 1|k_i^l) - x_r(k_i^l + m - 1))$ 。

- $\mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m)$ 为收缩约束，用于保证状态约束(2.2)能在扰动存在的情况下满足，收缩集 $\mathbb{B}_i(m)$ 定义为：

$$\mathbb{B}_i(m) \triangleq \left\{ x_i \in \mathbb{R}^n : \|x_i\|_{P_i} \leq \sum_{n=0}^{m-1} \|A^n\|_{P_i} \rho_i \right\}. \quad (2.8)$$

- 代价函数设计为：

$$\begin{aligned} & J_i(x_i(k_i^l), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^l), \mathbf{x}_j^a(k_i^l), N(k_i^l)) \\ &= \sum_{m=0}^{N(k_i^l)-1} \left\{ \|\hat{x}_i(k_i^l + m|k_i^l) - x_r(k_i^l + m)\|_{Q_i}^2 + \|\hat{u}_i(k_i^l + m|k_i^l)\|_{R_i}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\hat{x}_i(k_i^l + m|k_i^l) - \hat{x}_j^a(k_i^l + m|k_i^l)\|_{Q_{ij}}^2 \right\} \\ & \quad + \|\hat{x}_i(k_i^l + N(k_i^l)|k_i^l) - x_r(k_i^l + N(k_i^l))\|_{P_i}^2, \end{aligned}$$

其中 Q_i, R_i, Q_{ij}, P_i 都是正定矩阵。

注 1): 考虑(2.8)中收缩集 $\mathbb{B}_i(m)$ 的定义，如果真实状态与预测状态差满足 $(x_i(k_i^l + m) - \hat{x}_i(k_i^l + m|k_i^l)) \in \mathbb{B}_i(m)$ 且 $\hat{x}_i(k_i^l + m|k_i^l) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m)$ ，那么子系统 i 的真实状态满足(2.2)中的约束 $x_i(k_i^l + m) \in \mathbb{X}_i$ ；2): 上述定义的代价函数中含有的耦合项 $\|\hat{x}_i(k_i^l + m|k_i^l) - \hat{x}_j^a(k_i^l + m|k_i^l)\|_{Q_{ij}}^2$ 表示的是智能体之间的协作交流，目的是为了获得更好的控制性能 [59]；3): 注意到在一些分布式模型预测控制研究中 [93, 120]，为了保证整个系统的稳定性或者优化问题的可行性，要求每个智能体 $i, i \in \mathcal{V}$ 的真实状态轨迹 x_i 与预测状态轨迹 \hat{x}_i 不能偏差太远，所以在这些研究中优化问题加入了兼容性约束 ($\|\hat{x}_i(k_i^l + m|k_i^l) - \hat{x}_i^a(k_i^l + m|k_i^{l-1})\| \leq c, c > 0$)，这样的约束会导致优化问题的求解变得更复杂。本文中智能体的一致性可以由预测时域的更新得到保证（第四节的分析中将给出证明），避免对兼容性约束的需求，从而降低了求解分布式模型预测控制中 OCP 的复杂度。

2.3.2 事件触发策略

本部分给出具体的事件触发策略设计，包括决定触发时刻的触发条件以及预测时域的更新方式。

由于外部扰动 w_i 的存在，智能体 $i, i \in \mathcal{V}$ 的真实状态轨迹 $x_i(k_i^l + m)$ 与预测状态轨迹 $\hat{x}_i(k_i^l + m)$ 之间存在偏差，如果此偏差过大，可能会导致智能体 i 的真实状态轨迹过分偏离参考信号 x_r ，从而达不到多智能体的跟踪一致性。基于这样的事实，触发条件设计为：

$$\begin{aligned} \|x_i(k) - \hat{x}_i(k|k_i^l)\|_{P_i} &> \frac{\sigma_i - \rho_i}{\|A\|_{P_i}}, \\ k - k_i^l &= N(k_i^l), \end{aligned} \quad (2.9)$$

其中矩阵的诱导范数 $\|A\|_{P_i} = \sqrt{\lambda_{\max}(P_i^{-1/2} A^T P_i A P_i^{-1/2})}$ ， λ_{\max} 表示最大特征值， $(\sigma_i - \rho_i)/\|A\|_{P_i}$ 是触发阈值，常数 $\sigma_i > 0$ ，是有待设计的智能体的控制参数。如果条件(2.9)中的任意一个条件满足，那么事件被触发，(2.5)中的局部 OCP 将被求解。注意到预测时域是时变的，定义如下：

$$N(k_i^{l+1}) = N(k_i^l) - \Delta(k_i^l) + 1, \quad (2.10)$$

其中 $\Delta(k_i^l) = k_i^{l+1} - k_i^l$ 是相邻两次触发间隔。

注 由预测时域的更新方式(2.10)可知， $N(k_i^{l+1}) \leq N(k_i^l)$ 和 $N(k_i^l) \geq 1, \forall l \in \mathbb{N}$ 恒成立。进一步地，如果有 $\Delta(k_i^l) \geq 2, \forall l \in \mathbb{N}$ ，则 $N(k_i^{l+1}) < N(k_i^l)$ 成立，即预测时域是递减的。此外，条件(2.9)中的触发阈值的设计 $(\sigma_i - \rho_i)/\|A\|_{P_i}$ 使得触发时刻依旧有不等式 $\|x_i(k_i^{l+1}) - \hat{x}_i(k_i^{l+1}|k_i^l)\|_{P_i} \leq \sigma_i$ 成立 [128-129]，是可行性的一个保证，将在下述分析部分予以说明。

基于设计的触发条件(2.9)和预测时域更新方式(2.10)，具体方法总结为以下的自适应 ET-DMPC 算法。为了保证多智能体系统的一致性，本章采用双模 MPC

算法 2.1 自适应 ET-DMPC 算法

初始化：对于每个智能体 $i, i \in \mathcal{V}$ ，给定初始状态 $x_i(0)$ ，权重矩阵 Q_i, R_i, Q_{ij}, P_i ；局部反馈增益 K_i 、集合 \mathbb{X}_i^a 和终端约束集 \mathbb{X}_i^f ；控制参数 σ_i 和初始预测时域 $N(k_i^0)$ 。

- 1 在 $k = 0$ 时刻，对于全部智能体 i ，初始值 $\hat{x}_i(0|0) = x_i(0)$ ，其邻居的假设状态 $x_j^a(0|0) = 0, \forall j \in \mathcal{N}_i$ ；求解优化问题(2.5)，得到最优解 $\hat{u}_i^*(0)$ 和与其相关的最优状态轨迹 $\hat{x}_i^*(0)$ ，将控制量 $u_i(0) = \hat{u}_i^*(0|0)$ 应用到系统(2.1)；将 $\hat{x}_i^*(0)$ 传递给智能体 i 的邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 。
 - 2 在 $k > 0$ 时刻，测量当前状态 $x_i(k)$ ，如果 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i^a$ ，则控制输入切换到局部控制律 $u_i(k) = K_i(x_i(k) - x_r(k))$ ；否则，进入步骤 3。
 - 3 检测触发条件(2.9)是否满足，如果(2.9)满足，则根据(2.10)计算当前预测时域，并令 $l = l + 1$ 和 $k_i^l = k$ ，构造邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 的假设状态轨迹 $\hat{x}_j^a(k_i^l + m|k_i^l)$ ，智能体 i 求解优化问题(2.5)，得到最优解 $\hat{u}_i^*(k_i^l)$ 和 $\hat{x}_i^*(k_i^l)$ ，向其邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 传递，进行下一步；否则，直接进入步骤 4。
 - 4 应用控制输入量 $\hat{u}_i^*(k|k_i^l)$ 到系统(2.1)，并令 $k = k + 1$ ，进入步骤 2。
-

方案 [32], 即在当前时刻 k , 如果测量得到的智能体 $i, i \in \mathcal{V}$ 的真实状态轨迹满足 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i^a$, $\mathbb{X}_i^a \triangleq \{x_i \in \mathbb{R}^n : \|x_i - x_r(k)\|_{P_i} \leq \varepsilon_i\}$, 则应用到系统的控制输入 $u_i(k) = K_i(x_i(k) - x_r(k))$; 否则, 应用控制输入 $u_i(k) = \hat{u}_i^*(k|k_i^l)$, $k \in [k_i^l, k_i^{l+1} - 1]$ 。完整的算法总结为算法2.1。

2.4 策略分析

本节将对本章提出的多智能体系统的自适应 ET-DMPC 算法的可行性和整个多智能体系统的一致性进行分析。

2.4.1 方法可行性分析

ET-DMPC 算法的可行性确保了(2.5)中的 OCP 在每个触发时刻 $k_i^l, l \in \mathbb{N}$ 都存在解。本部分采用数学归纳法证明。具体地, 对于每个智能体 i , 假设在当前触发时刻, (2.5)中的 OCP 存在解, 如果在 k_i^{l+1} 触发时刻仍然存在解, 即可说明(2.5)中的 OCP 在任何时刻都有解。

首先, 对于智能体 i , 基于触发时刻 k_i^l 的最优控制输入 $\hat{u}_i^*(k_i^l)$, 构造 k_i^{l+1} 时刻的可行控制输入 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{l+1}) = \{\bar{u}_i(k_i^{l+1}|k_i^{l+1}), \dots, \bar{u}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1})\}$ 如下:

$$\bar{u}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) = \begin{cases} \hat{u}_i^*(k_i^{l+1} + m|k_i^l), m = 0, \dots, N(k_i^{l+1}) - 2, \\ K_i(\bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) - x_r(k_i^{l+1} + m)), m = N(k_i^{l+1}) - 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

与上述构造的可行控制输入 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{l+1})$ 对应的可行状态序列为 $\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{l+1}) = \{\bar{x}_i(k_i^{l+1}|k_i^{l+1}), \dots, \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1})|k_i^{l+1})\}$, 其满足的动态方程为:

$$\bar{x}_i(k_i^{l+1} + m + 1|k_i^{l+1}) = A\bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) + B\bar{u}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}),$$

其中 $\bar{x}_i(k_i^{l+1}|k_i^{l+1}) = x_i(k_i^{l+1})$ 。以下定理2.1说明在 k_i^{l+1} 时刻构造的可行控制输入是(2.5)中 OCP 在 k_i^{l+1} 时刻的可行解, 进一步地可以转化为证明可行的控制输入序列 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{l+1})$ 和状态序列 $\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{l+1})$ 满足(2.5)中的约束。

定理 2.1 对于智能体 $i, i \in \mathcal{V}$, 给定初始值 $x_i(0)$, 如果在初始时刻(2.5)中 OCP 有解且以下条件满足:

$$K_i(x_i - x_r) \in \mathbb{U}_i, \forall x_i \in \mathbb{X}_i^a, \quad (2.12)$$

$$\|A\|_{P_i}^{N(k_i^0)-1} \sigma_i + \alpha \varepsilon_i \leq \varepsilon_i, \quad (2.13)$$

$$\|A + BK_i\|_{P_i} \left(\|A\|_{P_i}^{N(k_i^0)-1} \sigma_i + \alpha \varepsilon_i \right) \leq \alpha \varepsilon_i, \quad (2.14)$$

则(2.5)中 OCP 是迭代可行的。

证明 为了更清晰地表述,我们将证明分为三个部分,第一部分说明状态序列满足收缩约束 $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m)$, $m = 0, \dots, N(k_i^{l+1}) - 1$; 第二部分说明终端约束 $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1})|k_i^{l+1}) \in \mathbb{X}_i^f$ 满足; 最后是控制输入满足约束 $\bar{u}_i(k_i^{l+1}) \in \mathbb{U}_i$ 。

- $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m)$: 首先计算真实状态 $x_i(k_i^l + m)$, $m = 0, \dots, \Delta(k_i^l)$ 与最优预测值 $\hat{x}_i^*(k_i^l + m|k_i^l)$ 之间的偏差。由系统动态方程(2.1)和优化问题(2.5)中预测状态轨迹可得:

$$\begin{aligned}
 & x_i(k_i^l + m) - \hat{x}_i^*(k_i^l + m|k_i^l) \\
 &= Ax_i(k_i^l + m - 1) + Bu_i(k_i^l + m - 1) + w_i(k_i^l + m - 1) \\
 &\quad - A\hat{x}_i^*(k_i^l + m - 1|k_i^l) + B\hat{u}_i^*(k_i^l + m - 1|k_i^l) \\
 &= A(x_i(k_i^l + m - 1) - \hat{x}_i^*(k_i^l + m - 1|k_i^l)) + w_i(k_i^l + m - 1) \\
 &\quad \dots \\
 &= A^m(x_i(k_i^l) - \hat{x}_i^*(k_i^l|k_i^l)) + \sum_{n=0}^{m-1} A^n w_i(k_i^l + m - n).
 \end{aligned}$$

由 $x_i(k_i^l) = \hat{x}_i^*(k_i^l|k_i^l)$ 和 $\|w_i\|_{P_i} \leq \rho_i$ 可得:

$$\|x_i(k_i^l + m) - \hat{x}_i^*(k_i^l + m|k_i^l)\|_{P_i} \leq \sum_{n=0}^{m-1} \|A^n\|_{P_i} \rho_i \quad (2.15)$$

然后计算 k_i^{l+1} 时刻的可行状态 $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1})$ 与最优状态 $\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + m|k_i^l)$ 的误差。

$$\begin{aligned}
 & \bar{x}_i(k_i^{l+1} + 1|k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + 1|k_i^l) \\
 &= A\bar{x}_i(k_i^{l+1} |k_i^{l+1}) + B\bar{u}_i(k_i^{l+1} |k_i^{l+1}) - A\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} |k_i^l) + B\hat{u}_i^*(k_i^{l+1} |k_i^l) \\
 &= A(x_i(k_i^{l+1}) - A\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} |k_i^l)), \\
 & \bar{x}_i(k_i^{l+1} + 2|k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + 2|k_i^l) \\
 &= A\bar{x}_i(k_i^{l+1} + 1|k_i^{l+1}) + B\bar{u}_i(k_i^{l+1} + 1|k_i^{l+1}) \\
 &\quad - A\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + 1|k_i^l) + B\hat{u}_i^*(k_i^{l+1} + 1|k_i^l) \\
 &= A^2(x_i(k_i^{l+1}) - A\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} |k_i^l)), \\
 &\quad \dots \\
 & \bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + m|k_i^l) \\
 &= A^m(x_i(k_i^{l+1}) - A\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} |k_i^l)). \tag{2.16}
 \end{aligned}$$

令公式(2.15)中 $m = \Delta(k_i^l)$ 并代入(2.16)可得:

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + m|k_i^l) \right\|_{P_i} \\ &= \|A^m\|_{P_i} \sum_{n=0}^{\Delta(k_i^l)-1} \|A^n\|_{P_i} \rho_i \leq \sum_{n=m}^{m+\Delta(k_i^l)-1} \|A\|_{P_i}^n \rho_i. \end{aligned} \quad (2.17)$$

因为 $\hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + m|k_i^l) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m + \Delta(k_i^l))$, 所以有下式成立:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) &\in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m + \Delta(k_i^l)) \oplus \sum_{n=m}^{m+\Delta(k_i^l)-1} \|A\|_{P_i}^n \rho_i \\ &\in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m), \end{aligned}$$

其中 \oplus 表示的是闵可夫斯基和集符号。

- $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1})|k_i^{l+1}) \in \mathbb{X}_i^f$: 首先需要说明 $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) \in \mathbb{X}_i^a$, 这意味着反馈增益 K_i 可以使用。由(2.16)式和触发条件(2.9)可得:

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^l) \right\|_{P_i} \\ & \leq \left\| A^{N(k_i^{l+1})-1} (x_i(k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1}|k_i^l)) \right\|_{P_i} \\ & \leq \|A\|_{P_i}^{N(k_i^0)-1} \sigma_i. \end{aligned}$$

另一方面, 最优状态 $\hat{x}_i^*(k_i^l + N(k_i^l)|k_i^l)$ 在 k_i^l 时刻满足终端约束, 即

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^l) - x_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1) \right\|_{P_i} \\ &= \left\| \hat{x}_i^*(k_i^l + N(k_i^l)|k_i^l) - x_r(k_i^l + N(k_i^l)) \right\|_{P_i} \leq \alpha \varepsilon_i \end{aligned}$$

因此, 考虑条件(2.13), 有下式成立:

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) - x_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1) \right\|_{P_i} \\ & \leq \|A\|_{P_i}^{N(k_i^0)-1} \sigma_i + \alpha \varepsilon_i \leq \varepsilon_i. \end{aligned}$$

所以 $\bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) \in \mathbb{X}_i^a$, 进而终端状态满足以下式:

$$\begin{aligned} & \left\| \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1})|k_i^{l+1}) - x_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1})) \right\|_{P_i} \\ &= \left\| A \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) + BK_i \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) \right. \\ & \quad \left. - x_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1) - Ax_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1) \right\|_{P_i} \\ &= \left\| (A + BK_i) \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) - x_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1) \right\|_{P_i} \\ &= \left\| (A + BK_i) \bar{x}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^l) \right. \\ & \quad \left. + \hat{x}_i^*(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^l) - x_r(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1) \right\|_{P_i} \\ & \leq \left\| (A + BK_i) \right\|_{P_i} \left(\|A\|_{P_i}^{N(k_i^0)-1} \sigma_i + \alpha \varepsilon_i \right). \end{aligned}$$

结合条件(2.14), 可证终端约束满足。

- $\bar{u}_i(k_i^{l+1}) \in \mathbb{U}_i$: 可行控制输入构造如(2.11)所示, 所以当 $m = 0, \dots, N(k_i^{l+1}) - 2$ 时, k_i^{l+1} 时刻的可行控制输入等于上一触发时刻 k_i^l 的最优控制输入, 即 $\bar{u}_i(k_i^{l+1} + m|k_i^{l+1}) = \hat{u}_i^*(k_i^{l+1} + m|k_i^l) \in \mathbb{U}_i$; 另一方面, 当 $m = N(k_i^{l+1}) - 1$ 时, 由条件(2.12)可得 $\bar{u}_i(k_i^{l+1} + N(k_i^{l+1}) - 1|k_i^{l+1}) \in \mathbb{U}_i$ 。

证毕。 ■

注 条件(2.12)-(2.14)是容易满足的。对于条件(2.12), 如果控制输入为 $\mathbb{U}_i \triangleq \{u_i \in \mathbb{R}^m : \|u_i\| \leq u_{\max}\}$, 由于 $\|x_i - x_r\|_{P_i} \leq \alpha \varepsilon_i$, 那么只要设计 K_i 和 P_i 使得不等式 $\sqrt{\lambda_{\max}(K_i^T K_i)} \sqrt{\lambda_{\min}(P_i)} \alpha \varepsilon_i \leq u_{\max}$ 成立即可。其他形式的控制输入约束类似。对于条件(2.13)和(2.14), 由于 (A, B) 是可控的, 所以可以设计适合的 K_i 和 P_i 使得条件满足。

2.4.2 多智能体一致性分析

本部分对多智能体系统(2.1)的一致性进行分析, 目的是给出在算法2.1下多智能体系统达到一致性的充分条件。

定理 2.2 如果假设2.1和定理2.1中的条件满足, 并且以下条件

$$\|A\|_{P_i} (1 + \|A\|_{P_i}) \rho_i + \rho_i \leq \sigma_i, \quad (2.18)$$

$$\|A + BK_i\|_{P_i} \varepsilon_i + \rho_i \leq \varepsilon_i, \quad (2.19)$$

满足, 那么多智能体系统(2.1)在算法2.1下能达到定义2.1中的一致性。

证明 1) 首先证明如果条件(2.18)满足, 则触发间隔 $\Delta(k_i^l) \geq 2, \forall l \in \mathbb{N}$ 。由触发条件(2.9), 不等式(2.15)和条件(2.18)易得 $\Delta(k_i^l) \geq 2, \forall l \in \mathbb{N}$, 从而预测时域满足 $N(k_i^{l+1}) < N(k_i^l)$, 预测时域会一直递减到 1, 这意味着每个智能体 $i, i \in \mathcal{V}$ 的状态 $x_i(k)$ 会在有限时间内进入集合 \mathbb{X}_i^a 。

2) 其次证明 \mathbb{X}_i^a 是鲁棒不变集。由 \mathbb{X}_i^a 的定义可知 $\|x_i(k) - x_r(k)\|_{P_i} \leq \varepsilon_i$, 那么根据双模策略有:

$$\begin{aligned} & \|x_i(k+1) - x_r(k+1)\|_{P_i} \\ &= \|Ax_i(k) + BK_i(x_i(k) - x_r(k)) + w_i(k) - Ax_r(k)\|_{P_i} \\ &= \|(A + BK_i)(x_i(k) - x_r(k)) + w_i(k)\|_{P_i} \\ &\leq \|(A + BK_i)\|_{P_i} \varepsilon_i + \rho_i \leq \varepsilon_i, \end{aligned}$$

其中最后一行不等式由条件(2.19)得到。结合 1) 和 2), 令定义2.1中 $\delta = \varepsilon_i / \sqrt{\lambda_{\min}(P_i)}$, 则多智能体系统(2.1)最终能达到定义中的一致性。 ■

注 不等式(2.18)(2.19)是容易成立的。对于条件(2.18), 在给定扰动和已设计权重矩阵 P_i 的情况下, σ_i 设计为满足(2.18)即可。对于条件(2.19), 由于 (A, B) 可控,

可以设计 K_i 和 P_i 使得 $\|A+BK_i\|_{P_i} < 1$, 那么 ε_i 设计满足 $(1-\|A+BK_i\|_{P_i})\varepsilon_i > \rho_i$ 即可使得(2.19)成立。

注 注意到本文提出的优化问题可行性充分条件(2.14)和多智能体系统一致性条件(2.19)是以诱导范数 $\|\cdot\|_{P_i}$ 形式给出, 而文献 [130] 中的条件是矩阵 2-范数形式。文献 [130] 中的条件是本文提出的充分条件的一种特殊情况, 即: P_i 为单位阵; 另一方面, 要使得本文中的条件(2.14)和(2.19)成立, 可以设计反馈增益 K_i 和权重矩阵 P_i 两个参数。由于 (A, B) 可控, 必然存在 K_i 和 P_i 使得 $\|A+BK_i\|_{P_i} < 1$, 而类似的条件在文献 [130] 中只能通过设计反馈增益 K_i , 且不一定存在 K_i 使得 $\|A+BK_i\|_{P_i} < 1$, 所以本文提出的优化问题可行性充分条件和多智能体系统一致性条件相对于文献 [130] 更易成立。

注 传统的基于 ET-DMPC 为了保证稳定性或一致性, 计算两个触发时刻的候选 Lyapunov 函数 (通常选择最优值函数) 之差, 从而给出系统稳定性或一致性的控制参数设计要求, 例如 [60, 120, 131] 等。而在多智能体的跟踪一致性中, 为了快速达到跟踪一致, 代价函数中不仅含有参考信号, 还有邻居的估计信息。触发导致子系统之间信息交换异步, 子系统对其邻居信息的估计误差会累积。所以, 以值函数作为 Lyapunov 函数作差的分析方法一方面要使用累积的邻居估计误差, 另一方面参考信号之差难处理, 从而使得为了保证一致性设计的控制参数很保守, 导致频繁触发。本章所提自适应策略则用递减的预测时域保证了系统一致性, 避免了使用传统的 Lyapunov 方法分析, 降低了保守性。

2.5 仿真验证

本节主要是通过仿真案例验证算法2.1的有效性。考虑的仿真案例是由四个车辆 ($M = 4$) 组成的多智能体系统。如图2.1所示, 其中每个车辆的动态方程如文献 [130] 所示, 经过采样周期 1s 离散化后为:



图 2.1 四个车辆组成的多智能体系统, 其中的虚线表示车辆之间的信息传输

$$\begin{cases} r_i(k+1) = r_i(k) + v_i(k) + 0.5u_i(k), \\ v_i(k+1) = v_i(k) + \frac{1}{m_i}u_i(k) + w_i(k), \end{cases} \quad (2.20)$$

其中 r_i 和 v_i 分别是车辆 $i, i \in \mathcal{V}$ 的位置和速度, m_i 为车辆 i 的质量, $m_i = 1\text{kg}$, w_i 是外部扰动。车辆的速度约束为 $|v_i| \geq 16\text{m/s}$, 控制约束为 $|u_i| \geq 10\text{N}$, 外部

扰动的上界 $\rho_i = 0.01$ 。最终的目标是使得每个车辆之间保持恒定的距离，速度保持相同恒定的值，即：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_i(k) - d_{ir} = \lim_{k \rightarrow \infty} r_j(k) - d_{jr},$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_j(k), \forall i, j \in \mathcal{V},$$

其中 d_{ir} 是车辆 i 与虚拟参考信号 x_r 之间期望的相对距离。

初始化每个车辆的初始值。令状态值 $x_i = [r_i - d_{ir}; v_i]$ ，其中每个车辆的起始位置分别是 $r_1(0) = -60\text{m}$ ， $r_2(0) = -50\text{m}$ ， $r_3(0) = 50\text{m}$ ， $r_4(0) = 70\text{m}$ 。起始速度分别为 $v_1(0) = 4\text{m/s}$ ， $v_2(0) = 1.5\text{m/s}$ ， $v_3(0) = 1\text{m/s}$ 和 $v_4(0) = 0.5\text{m/s}$ 。期望的相对距离为 $d_{1r} = -20\text{m}$ ， $d_{2r} = -10\text{m}$ ， $d_{3r} = 10\text{m}$ ， $d_{4r} = 20\text{m}$ 。参考信号初始值为 $r_r(0) = 0\text{m}$ ， $v_r(0) = 2\text{m/s}$ 。

仿真中，初始预测时域 $N(k_i^0) = 6$ ，权重矩阵 $Q_i = I_2$ ， $R_i = 1$ ， $Q_{ij} = 0.1I_2$ ， $\forall i \in \mathcal{V}$ ， $j \in \mathcal{N}_i$ 。根据文献 [33] 中的引理 1， P_i 可以设计为 $P_i = [2.85 \ 1.27; 1.27 \ 3.09]$ 。进而为了满足一致性条件，根据(2.18)式，可以设计 $\sigma_i = 0.052$ 。最后根据(2.12)-(2.14)和 (2.19)，设计 $K_i = [-0.5354 \ -1.1923]$ ， $\epsilon_i = 2.1$ ， $\forall i, i \in \mathcal{V}$ ， $\alpha = 0.72$ 。

使用 MATLAB 的 `fmincon` 函数求解分布式优化问题，仿真结果如图2.2-2.5所示。

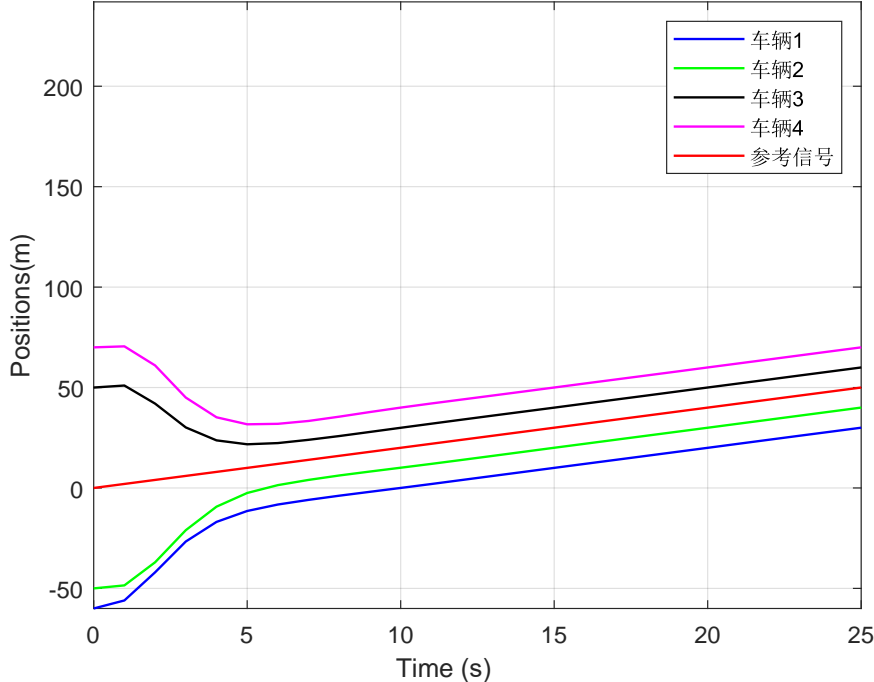


图 2.2 四个车辆的位置轨迹

- 从图2.2到图2.4可以看出，系统的状态约束和控制输入约束是满足的。
- 图2.2和图2.3说明了智能体系统达到了一致，即每个车辆与参考信号的位置保持了设定值的相对距离，与参考信号的速度保持相等。

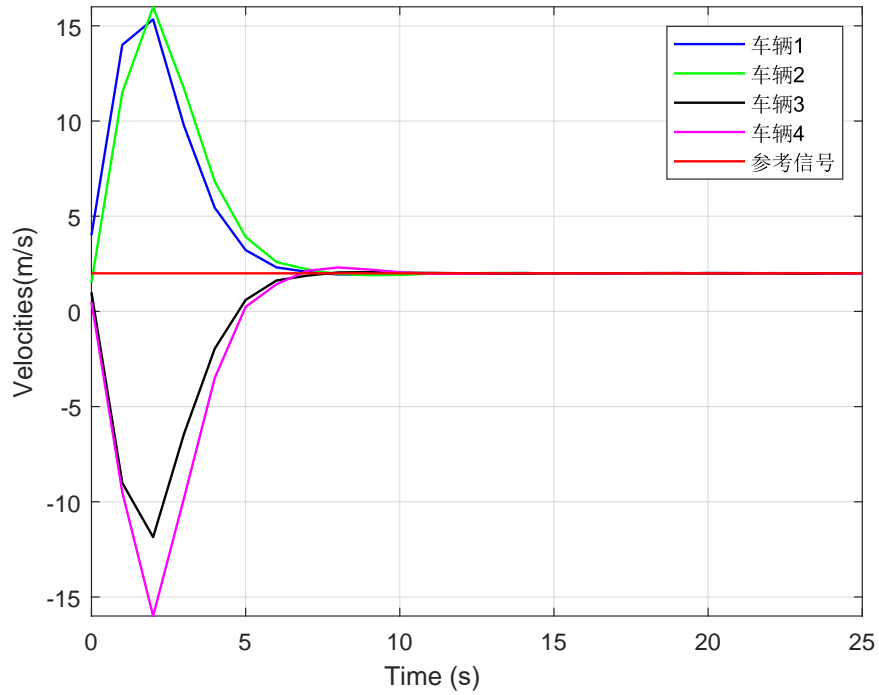


图 2.3 四个车辆的速度轨迹

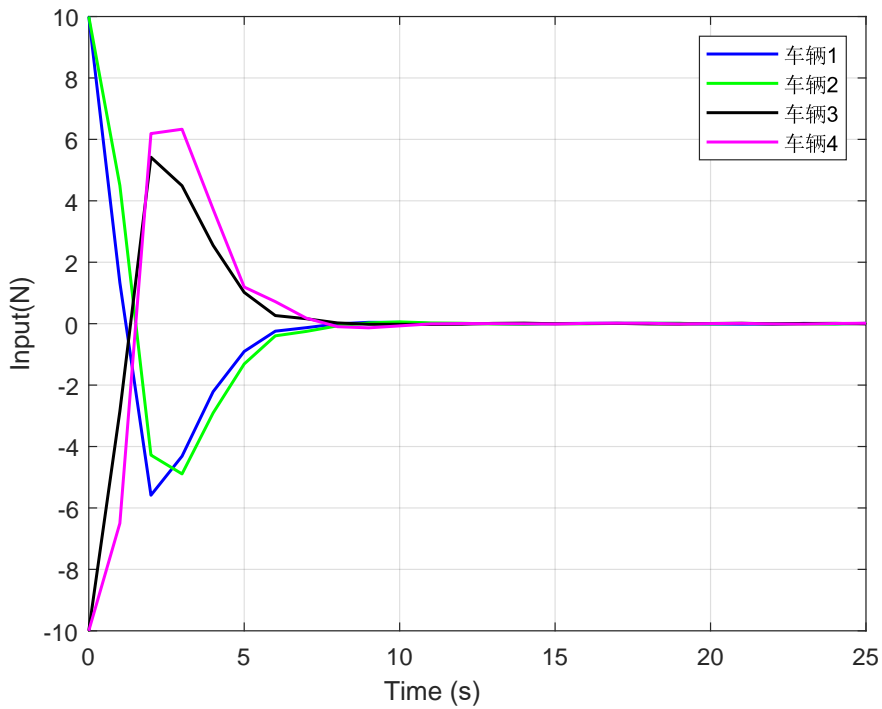


图 2.4 四个车辆的控制输入

- 图2.5中显示了 4 个车辆的触发时刻和预测时域，可以发现一方面优化问题的求解只发生在特定触发时刻，另一方面预测时域随状态靠近终端区域是衰减的，从而算法2.1有效地降低了计算和通信资源消耗。

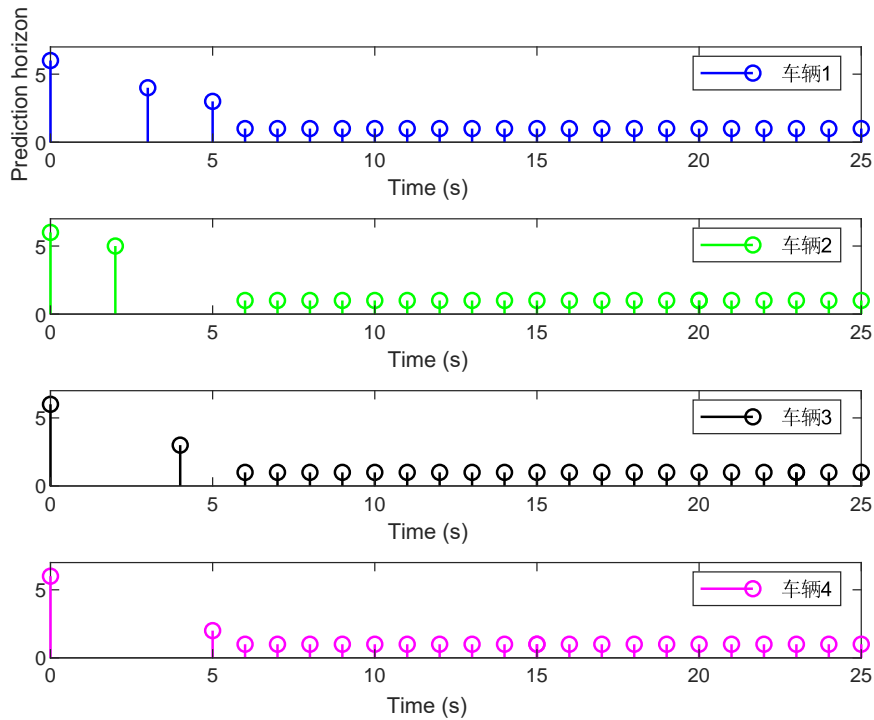


图 2.5 四个车辆的触发时刻和预测时域

2.6 本章小结

本章针对线性受扰多智能体系统提出了自适应 ET-DMPC 方法。该方法使得多智能体达到一致的同时,一方面通过自适应事件触发机制减少分布式优化问题的求解次数和降低优化问题求解复杂度,另一方面基于自适应时域保证了系统的一致性,降低了传统方法带来的保守性,从而更有效地降低了计算和通信资源消耗。通过约束收缩方法使得系统的真实状态在扰动存在下依旧满足约束,系统能够安全运行。建立了优化问题的可行性和系统一致性的充分条件,最终用多车辆案例说明了提出方法的有效性。

第3章 耦合非线性系统的复合事件触发分布式 MPC

3.1 引言

上一章研究了非耦合系统的事件触发策略设计中稳定性分析保守性大的问题。实际中一些大型系统是耦合系统，如智能电网、城市配水系统等等，所以研究耦合系统是有必要的。耦合系统的耦合项会直接影响到系统的控制性能，所以耦合系统的分布式模型预测控制的核心是耦合项的处理。对于耦合项的处理一般分为两种：一种是将耦合项忽略当做外部扰动，例如 [69, 91-92, 132]，但是这样会导致控制性能变差；第二种将耦合项保留于预测模型中，以此达到子系统之间信息交互的目的，从而提升系统控制性能，对应研究可见 [73, 93, 95, 133]。

本章采用第二种方法研究基于 ET-DMPC 的非线性耦合系统。当前，对于非线性耦合系统的 ET-DMPC 相对较少，原因在于耦合项的存在使得触发条件难以设计。Mi 等人在 [120] 中研究了线性耦合系统的 ET-DMPC 算法，为了处理耦合影响，在局部优化问题中加入了多个约束。Liu 等人在 [131] 中研究了非线性耦合系统的 ET-DMPC 算法，在优化问题中限制了子系统预测状态和假设状态之间的偏差，从而保证了算法可行。尽管在 [120, 131] 中已经研究了耦合系统的 ET-DMPC，但仍有一些问题需要解决。1) 耦合动态中的邻居系统精确信息不可得，进而需要对邻居信息进行估计。触发机制导致的异步行为会使得对邻居信息的估计误差累积，而基于稳定性设计的触发条件避免不了使用邻居估计信息，所以触发条件很容易满足，不能有效地节省计算和通信资源；2) 先前研究使用了双模策略 [60, 119-120, 131]，所以在状态进入终端约束集后，状态和控制输入需要通过通信网络周期性地传输到执行器，导致通信负载过大；3) 由于动态耦合的存在，传统的约束收缩方法无法保证状态约束的满足。

基于上述讨论，本章针对受扰的非线性耦合系统设计了一种新的 ET-DMPC 策略以更有效地节约计算和通信资源。首先，设计了一种复合事件触发方法，该复合触发条件包含了一个与邻居估计信息无关的稳定性触发条件，有效地降低了触发频率，并且避开了双模策略的使用，进而有效地降低了通信负载。其次是设计了一种新的约束收缩方法。本章基于触发阈值设计了新的约束收缩集，最终可以使得在耦合影响和外部扰动同时存在的情况下系统状态约束依旧满足。

本章主要安排如下，第3.2节描述所要研究的系统模型及系统控制架构。第3.3节描述了所提出的复合 ET-DMPC 算法，其包含局部 OCP 的构造和复合触发条件的设计。紧接着第3.4节分析了所提算法的可行性和系统的闭环稳定性。第3.5节通过仿真验证了所提算法的有效性。最后总结了本章的主要工作内容。

3.2 问题描述

本章考虑实际中常见的网络化控制系统 [134-135]，其架构如图3.1所示。该结构包括由多个耦合子系统组成的被控对象，多个控制器组成的计算平台，以及本地组件（例如传感器、事件生成器和执行器）与远程控制器之间的网络。整个系统的运行过程为：每个传感器 i 周期地测量状态，事件生成器 i 决定是否将测量的状态通过通信网络传输到远程控制器 i ；当远程控制器 i 接收到测量的状态则求解 OCP，求解得到的最优控制输入和对应的最优状态将通过通信网络传输给执行器 i 。

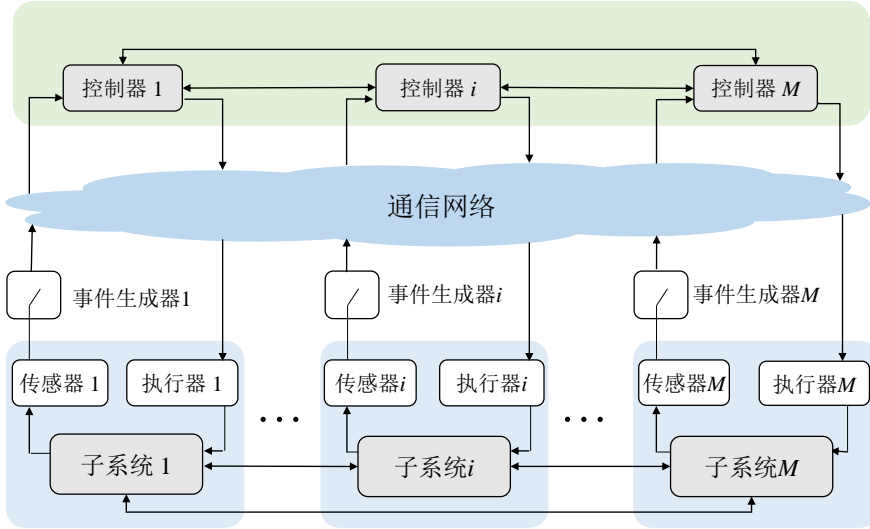


图 3.1 网络化控制系统的事件触发分布式模型预测控制架构

值得注意的是信息在每个传感器 i 、事件生成器 i 以及执行器 i 之间是共享的。同样，远端的各个控制器之间信息也是共享的，控制器之间信息共享可以使得控制器 i 能够使用子系统 i 的邻居信息来构造优化问题。实际中，这样的共享是可以通过硬件实现的，不需要通信成本。

考虑的被控对象由 M 个非线性离散子系统构成，子系统之间通过状态耦合。子系统之间的动态耦合用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 描述，其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, M\}$ 是节点的集合， $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是边的集合。第 i 个子系统由下列离散时间非线性系统描述：

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j(k)) + w_i(k), \quad (3.1)$$

其中 $i \in \mathcal{V}$ ，系统的状态和控制输入分别受到约束 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ 和 $u_i(k) \in \mathbb{U}_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ 。 $w_i(k) \in \mathbb{W}_i = \{w_i \in \mathbb{R}^{n_i} : \|w_i\|_{p_i} \leq \rho_i, \rho_i > 0\}$ 是系统的外部扰动。集合 \mathbb{X}_i 和 \mathbb{U}_i 是包含原点的紧集。 \mathcal{N}_i^u 表示子系统 i 的上游邻居集，即对于一些子系统 j ($j \neq i$)， j 的状态在子系统 i 的系统方程中。相应地，子系统 i 是子系统 j 的下游邻居集，即 $i \in \mathcal{N}_j^d$ 。

此外, 函数 f_i 和 g_{ij} 满足以下假设:

假设 3.1 函数 f_i 和 g_{ij} 满足 $f_i(0, 0) = 0$, $g_{ij}(0) = 0$, 并且对于任意 $x, y \in \mathbb{X}_i$, $x, y \in \mathbb{X}_j$, $i \in \mathcal{V}$ 和 $j \in \mathcal{N}_i^u$, 存在常数 L_{f_i} 和 $L_{g_{ij}}$ 使得以下不等式成立:

$$\|f_i(x, u) - f_i(y, u)\|_{P_i} \leq L_{f_i} \|x - y\|_{P_i}, \quad (3.2)$$

$$\|g_{ij}(x) - g_{ij}(y)\|_{P_i} \leq L_{g_{ij}} \|x - y\|_{P_i}, \quad (3.3)$$

其中, P_i 是权重矩阵。

注 Lipschitz 常数过大会导致分析结果过于保守。由于没有状态约束, 文献 [131] 中使用的是全局 Lipschitz 常数。而本文存在状态约束, 所以假设存在的是局部 Lipschitz 常数, 相比文献 [131], 本文的保守性更低。此外, 注意到假设 3.1 中的 Lipschitz 常数依赖于权重矩阵 P_i , 可以根据文献 [54] 中更换权重矩阵的方法进一步降低 Lipschitz 常数带来的保守性。

在系统动态方程(3.1)的基础上, 整个系统动态方程可以表示为如下形式:

$$x(k+1) = F(x(k), u(k)) + w(k) = f(x(k), u(k)) + g(x(k)) + w(k), \quad (3.4)$$

其中, $x = [x_1^T, \dots, x_M^T]^T \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_M$, $n = \sum_{i \in \mathcal{V}} n_i$, $u = [u_1^T, \dots, u_M^T]^T \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_M$, $m = \sum_{i \in \mathcal{V}} m_i$, $w = [w_1^T, \dots, w_M^T]^T \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 \times \dots \times \mathbb{W}_M$ 。此外, $f(x, u) = [f_1(x_1, u_1)^T, \dots, f_M(x_M, u_M)^T]^T$, $g(x) = [\sum_{j \in \mathcal{N}_1^u} g_{1j}(x_j)^T, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_M^u} g_{Mj}(x_j)^T]^T$ 。

为了使得系统能在原点附近稳定, 需要用到局部控制器, 其设计依赖于系统(3.1)的线性化。此外, 局部控制器在终端约束集内使用, 终端约束集的构造依赖于系统(3.4)的线性化。为此, 以下给出系统(3.1)和(3.4)的线性化。

子系统 i 在原点附近的线性化动态方程为:

$$x_i(k+1) = A_{ii}x_i(k) + B_i u_i(k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} A_{ij}x_j(k) + w_i(k), \quad (3.5)$$

其中, $A_{ii} = \partial f_i / \partial x_i(0, 0)$, $A_{ij} = \partial g_{ij} / \partial x_j(0)$, $j \in \mathcal{N}_i^u$, $B_i = \partial f_i / \partial u_i(0, 0)$ 。系统(3.4)在原点附近的线性化为:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \quad (3.6)$$

其中, $A = \partial F / \partial x(0, 0)$, $B = \partial f / \partial u(0, 0)$ 。

假设 3.2 对于每一个线性化的子系统 (3.5), 存在一个反馈控制器 $u_i(k) = K_i x_i(k)$ 使得 $A_{s_i} = A_{ii} + B_i K_i$ 和 $A_o = A + BK$ 都是舒尔稳定, 其中 $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_M)$ 。

从上述图3.1的控制结构的运行过程可知，通信和计算资源的消耗与数据传输的频率和优化问题的求解频率有关。因此，本章的主要目标是设计一个 ET-DMPC 策略以降低触发次数从而减少通信和计算资源消耗。

注 注意到文献 [120, 131] 中每个被控对象的控制器放置于本地，而在本章图3.1的控制结构中被放置于远端，这样的差别会带来以下两点影响：

1) 在文献 [120, 131] 中，不同子系统之间的信息交换需要利用通信网络。而在本章中，信息在远端控制器之间的交换不需要网络，可以通过硬件实现。

2) 在文献 [120, 131] 中，对于每个子系统 i ，信息从控制器 i 传输到本地部分不需要利用通信资源，而本章图3.1中的控制结构需要占用通信资源。

3.3 复合事件触发分布式模型预测控制策略设计

本节首次定义了局部 OCP，然后根据 OCP 的可行性和系统的稳定性建立触发条件，最终给出 ET-DMPC 算法。

3.3.1 分布式优化问题

在 ET-DMPC 控制框架下，每个子系统的触发时刻是不同的，所以每个控制器是异步激活的。因此，控制器 i 得不到上游邻居 $j(j \in \mathcal{N}_i^u)$ 的真实信息，尽管邻居 $j(j \in \mathcal{N}_i^u)$ 的真实信息有益于控制性能的提升。

对于每个子系统 i ，用 $k_i^r, r \in \mathbb{N}$ 表示第 r 个触发时刻。为了考虑耦合影响，每个子系统 i 假设其上游邻居的行为。具体来说，在每个触发时刻 k_i^r 之前，每个控制器 i 利用其上游邻居的假设状态 x_j^a 。类似地，子系统 i 也将自身信息传送到其下游邻居，让下游邻居构造假设状态 x_i^a 。

基于上述触发时刻和假设状态的定义，局部 OCP 定义如下：

$$\min_{\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r)} J_i(\hat{x}_i(k_i^r), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r))$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \hat{x}_i(k_i^r + m + 1|k_i^r) &= f_i(\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r), \hat{u}_i(k_i^r + m|k_i^r)) \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k_i^r + m|k_i^r)), m = 0, \dots, N_i - 1 \end{aligned} \quad (3.7a)$$

$$\|\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r) - \bar{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^{r-1})\|_{P_i} \leq \sigma, m = 0, \dots, N_i \quad (3.7b)$$

$$\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m), m = 1, \dots, N_i - 1 \quad (3.7c)$$

$$\hat{u}_i(k_i^r + m|k_i^r) \in \mathbb{U}_i, m = 0, \dots, N_i - 1 \quad (3.7d)$$

$$\hat{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^r) \in \mathbb{X}_i^f, \quad (3.7e)$$

其中 N_i 是每个子系统 i 的预测时域， $\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r) = \{\hat{u}_i(k_i^r|k_i^r), \dots, \hat{u}_i(k_i^r + N_i - 1|k_i^r)\}$ 是在 k_i^r 时刻的预测控制输入， $\mathbb{X}_i^f = \{x \in \mathbb{R}^{n_i} : \|x\|_{P_i} \leq 4\epsilon/(5\sqrt{M})\}$ 表示终端约束

集, 控制参数 ε 和 σ 将在分析部分确定。

用 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k_i^r) = \{\hat{u}_i^*(k_i^r|k_i^r), \dots, \hat{u}_i^*(k_i^r + N_i - 1|k_i^r)\}$ 表示最优控制输入序列, $\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^r) = \{\hat{x}_i^*(k_i^r|k_i^r), \dots, \hat{x}_i^*(k_i^r + N_i|k_i^r)\}$ 表示与之相对应的最优状态序列。以下部分给出优化问题中假设状态 $x_j^a(k_i^r + m|k_i^r)$, 状态 $\bar{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^{r-1})$, 收缩集 $\mathbb{B}_i(m)$, 代价函数 $J_i(\hat{x}_i(k_i^r), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r), N_i)$ 的具体形式。

- 假设状态 $x_j^a(k + m|k), j \in \mathcal{N}_i^u$ 构造如下:

$$x_j^a(k + m|k) = \begin{cases} \hat{x}_j^*(k + m|\eta_j(k)), m = 0, \dots, \eta_j(k) + N_j - k \\ f_j(x_j^a(k + m - 1|k), K_j x_j^a(k + m - 1|k)), \\ m = \eta_j(k) + N_j - k + 1, \dots, N_i, \end{cases} \quad (3.8)$$

其中 $\eta_j(k)$ 子系统 j 在 k 时刻之前离 k 最近的触发时刻, 即 $\eta_j(k) < k$ 。图3.2给出假设状态构造的示意图。

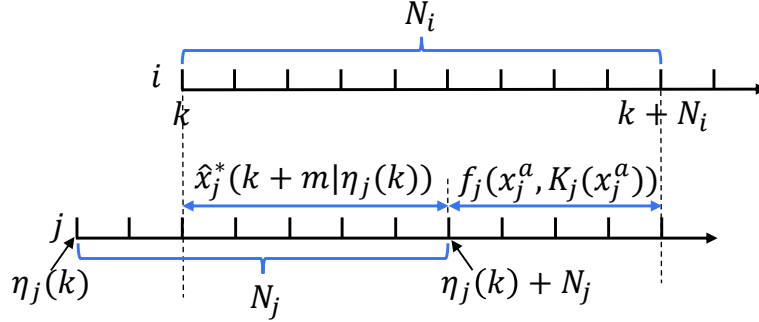


图 3.2 假设状态构造示意图

- (3.7b)中的状态 $\bar{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^{r-1})$ 构造如下:

$$\bar{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^{r-1}) = \begin{cases} \hat{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^{r-1}), & k = 0, \dots, N_i - \Delta(k_i^r) \\ f_i(\bar{x}_i^*(k_i^r + m - 1|k_i^{r-1}), K_i \bar{x}_i^*(k_i^r + m - 1|k_i^{r-1})), \\ k = N_i - \Delta(k_i^r) + 1, \dots, N_i, \end{cases} \quad (3.9)$$

其中 $\Delta(k_i^r) = k_i^r - k_i^{r-1}$ 为两个相邻触发时刻的间隔。

- 收缩集 $\mathbb{B}_i(m)$ 定义如下:

$$\mathbb{B}_i(m) := \{x \in \mathbb{R}^{n_i} : \|x\|_{P_i} \leq \frac{L_{f_i}^m - 1}{L_{f_i} - 1} \tau_i + N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma \frac{L_{f_i}^m - L_{f_i}}{(L_{f_i} - 1)^2}\}, \quad (3.10)$$

其中 $\tau_i > 0$ 将在分析部分给出具体形式。

- 代价函数定义为:

$$\begin{aligned} & J_i(\hat{x}_i(k_i^r), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r)) \\ &= \sum_{m=0}^{N_i-1} \|\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r)\|_{Q_i}^2 + \|\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r + m|k_i^r)\|_{R_i}^2 + \|\hat{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^r)\|_{P_i}^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

其中 $Q_i, R_i,$ 和 P_i 是正定矩阵。此外, 矩阵 P_i 满足 Lyapunov 方程: $A_{s_i}^T P_i A_{s_i} - P_i = -(\tilde{Q}_i + \Delta Q_i), \tilde{Q}_i = Q_i + K_i^T R_i K_i, \Delta Q_i$ 是一个正定矩阵。

注 1) 式(3.7b)中的约束意味着子系统 i 的预测状态 $\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r)$ 不会偏离 $\bar{x}^*(k_i^r + m|k_i^{r-1})$ 太远。通过建立这个约束, 可以将下面构造的可行状态与最优预测状态建立起联系, 有利于分析(3.7)中局部 OCP 的可行性。2) 式(3.10)中的收缩集 $\mathbb{B}_i(m)$ 是为了保证在外部扰动和耦合影响同时存在的情况下状态约束 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i, \forall k > 0$ 仍然满足, 将在分析部分 3.4 给出具体说明。

以下是关于耦合度和状态反馈增益的假设, 并做进一步解释。

假设 3.3 $A_o^T P A_o - A_s^T P A_s \leq 1/2 \tilde{Q}$

假设 3.4 存在辅助集合 $\mathbb{X}_i^a := \{x_i : \|x_i\|_{P_i} \leq \varepsilon/\sqrt{M}\}, \Omega_i = \{x_i : \|x_i\|_{P_i} \leq \alpha_i \varepsilon/\sqrt{M}\}, \Phi_i := \{x_i : \|x_i\|_{P_i} \leq 4c_i \varepsilon/(5\sqrt{M})\}$ 和一些常数 $L_{f_{K_i}} > 0, 0 < c_i < 1, 0 < \alpha_i < 1$ 使得对全部 $i \in \mathcal{V}, j \in N_i^u$, 有

- (a) $\mathbb{X}_i^a \subseteq \{x_i \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(N_i - 1) : K_i x_i \in \mathbb{U}_i\}$;
- (b) $f_i(x_i, K_i x_i) \in \Phi_i, \forall x_i \in \mathbb{X}_i^a$;
- (c) $f_i(x_i, K_i x_i) + \sum_{j \in N_i^u} g_{ij}(x_j^a) \in \Omega_i, \forall x_i \in \mathbb{X}_i^a, x_j^a \in \mathbb{X}_j^a$;
- (d) $\|f_i(x_i, K_i x_i) - f_i(y_i, K_i y_i)\|_{P_i} \leq L_{f_{K_i}} \|x_i - y_i\|_{P_i}, \forall x_i, y_i \in \mathbb{X}_i^a$ 。

注 1) 假设 3.3 在分布式模型预测控制的研究中属于一个标准假设, 例如研究 [91, 93, 131], 其限制了子系统之间的耦合程度, 是下面引理 3.1 中正定不变集 \mathbb{X}^a 存在的前提。选择合适的正定矩阵 ΔQ 可以使得假设 3.3 成立。

2) 假设 3.4 中的性质 (a)-(d) 的提出是为了保证(3.7)中 OCP 的迭代可行性和系统的稳定性。性质 (a), (b) 和 (d) 是标准假设, 在文献 [56, 73, 105-106, 136] 有类似的假设。性质 (a) 成立只要集合 \mathbb{X}_i^a 设置的比较小。根据下面引理 3.1, 通过设置 $c_i = \sqrt{1 - \bar{\lambda}(P_i^{-1/2} \tilde{Q}_i P_i^{-1/2})}$, 则性质 (b) 很容易满足。性质 (c) 与 [73, 136] 中的假设类似, 如果子系统之间的耦合度过强, 则性质 (c) 可能不满足。此外, 对于一个耦合系统, 解析地求解 α_i 是比较难的, 可以通过数值仿真确定 α_i 。

引理 3.1 令 $A_s = \text{diag}(A_{s_1}, \dots, A_{s_M}), Q = \text{diag}(Q_1, \dots, Q_M), R = \text{diag}(R_1, \dots, R_M), P = \text{diag}(P_1, \dots, P_M), \Delta Q = \text{diag}(\Delta Q_1, \dots, \Delta Q_M)$, 则在假设 3.1-3.3 成立的前提下, 系统 $x(k+1) = F(x(k), Kx(k))$ 有:

- 1) 存在一个常数 ε 使得集合 $\mathbb{X}^a := \{x : V(x) \leq \varepsilon^2\}$ 是正定不变集;
- 2) $V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq -1/2 x(k)^T \tilde{Q} x(k)$ 成立, 对于任意 $x(k) \in \mathbb{X}^a, Kx(k) \in \mathbb{U}$, 其中 $V(x(k)) = \|x(k)\|_P^2$ 。

证明 证明的逻辑类似于 [137], 由于其证明过程有利于理解集合 \mathbb{X}^a 的设计, 所以这里依旧给出简洁的证明过程。定义 $\psi(x(k)) = F(x(k), K(x(k))) - A_o(x(k))$,

则 $V(x(k))$ 沿着轨迹 $x(k+1) = F(x(k), K(x(k)))$ 的差为:

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= x(k)^T A_o^T P A_o x(k) + \psi(x(k))^T P \psi(x(k)) \\ &\quad + 2\psi(x(k))^T P A_o x(k) - x(k)^T P x(k). \end{aligned}$$

考虑到 $A_s^T P A_s - P = -(\tilde{Q} + \Delta Q)$ 和 $A_o^T P A_o - A_s^T P A_s \leq 1/2\tilde{Q}$, 则有以下式成立:

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &\leq -\frac{1}{2}x(k)^T \tilde{Q}x(k) - x(k)^T \Delta Qx(k) \\ &\quad + \psi(x(k))^T P \psi(x(k)) + 2\psi(x(k))^T P A_o x(k). \end{aligned} \quad (3.12)$$

上述式(3.12)中含有 $\psi(x(k))$ 的项进一步表达为:

$$\begin{aligned} \psi(x(k))^T P \psi(x(k)) &\leq \|P\| \cdot \bar{L}^2 \cdot \|x(k)\|^2, \\ \psi(x(k))^T P A_o x(k) &\leq \|P A_o\| \cdot \|\psi(x(k))^T\| \cdot \|x(k)\| \\ &\leq \|P A_o\| \cdot \bar{L} \cdot \|x(k)\|^2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

其中 $\bar{L} := \sup\{\|\psi(x)\|/\|x\| \mid x \in \mathbb{X}^a, x \neq 0\}$ 。

将(3.13)代入到(3.12)中产生

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &\leq -\frac{1}{2}x(k)^T \tilde{Q}x(k) - x(k)^T \Delta Qx(k) \\ &\quad + (\bar{L}^2 \|P\| + 2\bar{L} \|P A_o\|) \|x(k)\|^2. \end{aligned}$$

因此, 如果下述条件成立, 则引理3.1中 1) 和 2) 能成立。

$$(\bar{L}^2 \|P\| + 2\bar{L} \|P A_o\|) \|x(k)\|^2 \leq x(k)^T \Delta Qx(k).$$

由于 $x(k)^T \Delta Qx(k) \geq \lambda_{\min}(\Delta Q) \|x(k)\|^2$, 上述条件等价于

$$(\bar{L}^2 \|P\| + 2\bar{L} \|P A_o\|) \|x(k)\|^2 \leq x(k)^T \Delta Qx(k).$$

考虑到 $\bar{L}^2 \|P\| + 2\bar{L} \|P A_o\| - \lambda_{\min}(\Delta Q) = 0$ 的正的解为

$$\bar{L}^* = \frac{\sqrt{\|P A_o\|^2 + \lambda_{\min}(\Delta Q) \|P\|} - \|P A_o\|}{\|P\|}$$

因此, 如果选择一个 $\varepsilon > 0$ 使得 $\bar{L} \leq \bar{L}^*$, 则引理3.1中 1) 和 2) 成立。证毕。 ■

注 集合 \mathbb{X}^a 在构造优化问题的可行解和分析系统的稳定性时比较重要 [56, 93]。为了确定集合 \mathbb{X}^a , 我们可以选择一个足够大的 ε 使得 $\bar{L} \leq \bar{L}^*$ 满足。除此之外, 我们还可以通过如下方法来确定一个低保守的 \mathbb{X}^a 。事实上, 为了保证 $V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq -1/2x(k)^T \tilde{Q}x(k)$, 式(3.12)中的不等式 $-x(k)^T \Delta Qx(k) +$

$\psi(x(k))^T P \psi(x(k)) + 2\psi(x(k))^T P A_o x(k) \leq 0$ 需要满足。因此, 选择控制参数 ε 使得下述优化问题的最优值是负值即可。

$$\begin{aligned} M(\varepsilon) &= \max_x \{-x^T \Delta Q x + \psi(x)^T P \psi(x) + 2\psi(x)^T P A_o x\} \\ \text{s.t.} \quad & 0 < x^T P x \leq \varepsilon^2 \\ & \varepsilon \leq \zeta, \end{aligned} \quad (3.14)$$

其中, 选取 ζ 使得对于任意 $x \in \{x : x^T P x \leq \zeta\}$, 都有 $Kx \in \mathbb{U}$ 。为了获得一个较大的 \varkappa^a , 可以一直增加 ε 只要保证 $M(\varepsilon)$ 是负值即可。

3.3.2 复合事件触发条件

本部分确定了复合触发条件, 包含一个确保 OCP 迭代可行的触发条件和一个保证稳定性的并行触发条件。

1. 可行性触发条件

在每个更新时刻, 对于每个子系统 i , 其上游邻居的假设状态可以传送到控制器 i 。一方面, 子系统 i 获得的是其上游邻居的假设状态信息而非真实状态信息。另一方面, 子系统 i 受到外部扰动。这两方面使得预测状态轨迹与真实轨迹存在偏差, 从而可能会导致(3.7b)和(3.7e)中的约束不满足。为了解决此问题, 设计了如下的触发条件

$$\|x_i(k) - \hat{x}_i^*(k|k_i^r)\|_{P_i} > \frac{\tau_i - \bar{\lambda}(P_i^{\frac{1}{2}})\rho_i - \Gamma_i L_{g_{ij}}(\tau_j + N_i \sigma)}{L_{f_i}}, \quad (3.15)$$

其中 $\Gamma_i = \max_{i \in \mathcal{V}} \text{Card}\{\mathcal{N}_i^u\}$ 。

对于每个子系统 i , $i \in \mathcal{V}$, 如果预测状态 $\hat{x}_i^*(k|k_i^r)$ 与真实状态 $x_i(k)$ 之间的偏差超过设定的阈值, 则触发事件。基于(3.15)中的触发条件, 引理3.2给出下一触发时刻的状态误差估计的上界。

引理 3.2 对于子系统(3.1), 在假设3.1成立的前提下, 如果触发条件设计为(3.15), 则

$$\|x(k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1}|k_i^r)\|_{P_i} \leq \tau_i \quad (3.16)$$

证明 在下一触发时刻 k_i^{r+1} , 预测状态和真实状态之间的偏差可以计算为

$$\begin{aligned} & \|x(k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1}|k_i^r)\|_{P_i} \\ & \leq L_{f_i} \|x_i(k_i^{r+1} - 1) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} - 1|k_i^r)\|_{P_i} + \rho_i + \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j(k_i^{r+1} - 1)) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k_i^{r+1} - 1|k_i^r)) \right\|_{P_i}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

其中，耦合项的差为

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j(k_i^{r+1} - 1)) - \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k_i^{r+1} - 1 | k_i^r)) \right\|_{P_i} \\
 & \leq \Gamma_i L_{g_{ij}} (\|x_j(k_i^{r+1} - 1) - \hat{x}_j^*(k_i^{r+1} - 1 | \eta_j(k_i^{r+1} - 1))\|_{P_i}) \\
 & \quad + \|\hat{x}_j^*(k_i^{r+1} - 1 | \eta_j(k_i^{r+1} - 1)) - x_j^a(k_i^{r+1} - 1 | k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq \Gamma_i L_{g_{ij}} \left(\|x_j(k_i^{r+1} - 1) - \hat{x}_j^*(k_i^{r+1} - 1 | \eta_j(k_i^{r+1} - 1))\|_{P_i} + N_i \sigma \right).
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

此外，由触发条件(3.15)可以得到下式成立

$$\|x_i(k_i^{r+1} - 1) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} - 1 | k_i^r)\|_{P_i} \leq \frac{\tau_i - \rho_i - \Gamma_i L_{g_{ij}} (\tau_j + N_i \sigma)}{L_{f_i}}. \tag{3.19}$$

将(3.18)和(3.19)代入到(3.17)可得

$$\|x(k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} | k_i^r)\|_{P_i} \leq \tau_i.$$

证毕。 ■

引理3.2说明了即使触发了事件，状态估计误差在触发时刻依旧以 τ_i 为界，此引理是迭代可行性的先行条件。

2. 稳定性并行触发条件

稳定性触发条件的设计基本原则是使得 Lyapunov 函数随时间递减。假设在 k_i^r 时刻求解(3.7)中的 OCP 从而获得最优控制输入 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k_i^r)$ 和与之对应的最优状态序列 $\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^r)$ 。基于最优控制输入，可以构造一组控制输入序列 $\bar{\mathbf{u}}_i(k) = \{\bar{u}_i(k|k), \dots, \bar{u}_i(k+N_i-1|k)\}$ 和一组状态序列 $\bar{\mathbf{x}}_i(k) = \{\bar{x}_i(k_i^r | k_i^r), \dots, \bar{x}_i(k_i^r + N | k_i^r)\}$ ，具体构造方式如下：

当 $k = k_i^r + 1$ 时，

$$\begin{cases} \bar{x}_i(k+m+1|k) = f_i(\bar{x}_i(k+m|k), \bar{u}_i(k+m|k)) \\ \quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k+m|k)), \quad m = 0, \dots, N_i - 1, \\ \bar{u}_i(k+m|k) = \begin{cases} \hat{u}_i^*(k+m|k_i^r), & m = 0, \dots, N_i - 2, \\ K_i \bar{x}_i(k+m|k), & m = N_i - 1. \end{cases} \end{cases} \tag{3.20}$$

当 $k > k_i^r + 1$ 时，

$$\begin{cases} \bar{x}_i(k+m+1|k) = f_i(\bar{x}_i(k+m|k), \bar{u}_i(k+m|k)) \\ \quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k+m|k)), \quad m = 0, \dots, N_i - 1, \\ \bar{u}_i(k+m|k) = \begin{cases} \bar{u}_i(k+m|k-1), & m = 0, \dots, N_i - 2, \\ K_i \bar{x}_i(k+m|k), & m = N_i - 1, \end{cases} \end{cases} \tag{3.21}$$

其中初始值 $\bar{x}_i(k|k) = x_i(k)$, $K_i(\cdot)$ 是定义在假设 3.2 中的反馈增益。构造的控制输入序列 $\bar{u}_i(k)$ 和状态序列 $\bar{x}_i(k)$ 不仅用于确定下一触发时刻, 还会用于分析优化问题的迭代可行性。

候选的 Lyapunov 函数定义为

$$V_i(x_i(k|k)) = \sum_{m=0}^{N_i} \|x_i(k+m|k)\|_{P_i}. \quad (3.22)$$

用 $\Delta V_i(k)$ 表示 Lyapunov 函数在相邻两个时刻 k 和 $k-1$ 的差, 则

$$\Delta V_i(k) = \begin{cases} V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\hat{x}_i^*(k_i^r|k_i^r)), & k = k_i^r + 1 \\ V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\bar{x}_i(k-1|k-1)), & k_i^r + 1 < k < k_i^{r+1}. \end{cases}$$

下面的引理 3.3 给出了 $\Delta V_i(k)$ 的上界, 基于此设计后面的触发条件。

引理 3.3 对于(3.1)中的每个子系统, 假设 3.1 和 3.4 成立的前提下, 如果使用(3.20) 或(3.21) 中构造的控制输入, 则 $\Delta V_i(k)$ 的上界为

$$\begin{aligned} \Delta V_i(k) \leq & -\|x_i(k-1)\|_{P_i} + e_i(k) + \sum_{m=1}^{N_i-1} \chi_i(m) + \|\hat{x}_i(k+N_i|k-1)\|_{P_i} \\ & + L_{f_{K_i}} \chi_i(N_i-1) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \xi_j(k+N_i-1|k) \end{aligned}$$

其中,

$$e_i(k) = \begin{cases} \|x_i(k) - \hat{x}_i^*(k|k_i^r)\|_{P_i}, & k = k_i^r + 1, \\ \|x_i(k) - \bar{x}_i(k|k-1)\|_{P_i}, & k_i^r + 1 < k < k_i^{r+1}, \end{cases}$$

$$\chi_i(m) = L_{f_i}^m e_i(k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} \sum_{l=0}^{m-1} L_{f_i}^{m-l-1} L_{g_{ij}} \xi_j(k+l|k),$$

$$\xi_j(k+l|k) = \|x_j^a(k+l|k) - x_j^a(k+l|k-1)\|_{P_i},$$

此外,

$$\hat{x}_i(k+N_i|k-1) = \begin{cases} f_i(\hat{x}_i^*(k+N_i-1|k_i^r), K_i \hat{x}_i^*(k+N_i-1|k_i^r)) \\ \quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k+N_i-1|k_i^r)), & k = k_i^r + 1, \\ f_i(\bar{x}_i(k+N_i-1|k-1), K_i \bar{x}_i(k+N_i-1|k-1)) \\ \quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k+N_i-1|k-1)), & k_i^r + 1 < k < k_i^{r+1}. \end{cases}$$

证明 当 $k = k_i^r + 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 & V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\hat{x}_i^*(k_i^r|k_i^r)) \\
 &= -\|\hat{x}_i^*(k_i^r|k_i^r)\|_{P_i} + \|x_i(k)\|_{P_i} - \|\hat{x}_i^*(k|k_i^r)\|_{P_i} \\
 &+ \underbrace{\sum_{m=1}^{N_i-1} (\|\bar{x}_i(k+m|k)\|_{P_i} - \|\hat{x}_i^*(k+m|k_i^r)\|_{P_i})}_{\Delta_1} \\
 &+ \underbrace{\|\bar{x}_i(k+N_i|k)\|_{P_i} - \|\hat{x}_i^*(k+N_i|k_i^r)\|_{P_i} + \|\hat{x}_i^*(k+N_i|k_i^r)\|_{P_i}}_{\Delta_2}, \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

其中 $\hat{x}_i^*(k+N_i|k_i^r) = f_i(\hat{x}_i^*(k+N_i-1|k_i^r), K_i \hat{x}_i^*(k+N_i-1|k_i^r)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k+N_i-1|k_i^r))$ 。

对于 Δ_1 , 根据假设3.1和式(3.20)中构造的控制输入, 迭代地计算可以得到

$$\begin{aligned}
 & \|\bar{x}_i(k+m|k) - \hat{x}_i^*(k+m|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq L_{f_i} \|\bar{x}_i(k+m-1|k) - \hat{x}_i^*(k+m-1|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \|x_j^a(k+m-1|k) - x_j^a(k+m-1|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \dots \\
 & \leq L_{f_i}^m e_i(k) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} \sum_{l=0}^{m-1} L_{f_i}^{m-l-1} L_{g_{ij}} \xi_j(k+l|k) \\
 & =: \chi_i(m), \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

其中 $e_i(k) = \|x_i(k) - \hat{x}_i^*(k|k_i^r)\|_{P_i}$, $\xi_j(k+l|k) = \|x_j^a(k+l|k) - x_j^a(k+l|k_i^r)\|_{P_i}$ 。

对于 Δ_2 , 可以计算得到

$$\begin{aligned}
 \Delta_2 & \leq L_{f_{K_i}} \|\bar{x}_i(k+N_i-1|k) - \hat{x}_i^*(k+N_i-1|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \|x_j^a(k+N_i-1|k) - x_j^a(k+N_i-1|k_i^r)\|_{P_i}.
 \end{aligned}$$

使用上述不等式(3.24), 可以得到

$$\Delta_2 \leq L_{f_{K_i}} \chi_i(N_i-1) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \xi_j(k+N_i-1|k). \quad (3.25)$$

结合式(3.23), (3.24)和(3.25)进一步得到

$$\begin{aligned}
 & V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\hat{x}_i^*(k_i^r|k_i^r)) \\
 & \leq -\|\hat{x}_i^*(k_i^r|k_i^r)\|_{P_i} + \sum_{m=1}^{N_i-1} \chi_i(m) + \|\hat{x}_i(k+N_i|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & + e_i(k) + L_{f_{K_i}} \chi_i(N_i-1) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \xi_j(k+N_i-1|k).
 \end{aligned}$$

当 $k_i^r+1 < k < k_i^{r+1}$, 使用的是(3.21)中的控制序列, 则 $V_i(\bar{x}_i(k|k))$ 和 $V_i(\bar{x}_i(k-1|k-1))$ 之间的差为

$$\begin{aligned}
 & V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\bar{x}_i(k-1|k-1)) \\
 & \leq -\|x_i(k-1)\|_{P_i} + \|x_i(k) - \bar{x}_i(k|k-1)\|_{P_i} \\
 & + \sum_{m=1}^{N_i-1} \|\bar{x}_i(k+m|k) - \bar{x}_i(k+m|k-1)\|_{P_i} \\
 & + \|\bar{x}_i(k+N_i|k)\|_{P_i} - \|\hat{x}_i(k+N_i|k-1)\|_{P_i} \\
 & + \|\hat{x}_i(k+N_i|k-1)\|_{P_i}, \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

其中 $\hat{x}_i(k+N_i|k-1) = f_i(\bar{x}_i(k+N_i-1|k-1), K_i \bar{x}_i(k+N_i-1|k-1)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k+N_i-1|k-1))$ 。

采用与 $k = k_i^r + 1$ 时同样的处理方法, 则可以得到

$$\begin{aligned}
 & V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\bar{x}_i(k-1|k-1)) \\
 & \leq -\|x_i(k-1)\|_{P_i} + \sum_{m=1}^{N_i-1} \chi_i(m) + \|\hat{x}_i(k+N_i|k-1)\|_{P_i} \\
 & + e_i(k) + L_{f_{K_i}} \chi_i(N_i-1) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \xi_j(k+N_i-1|k),
 \end{aligned}$$

其中 $e_i(k) = \|x_i(k) - \bar{x}_i(k|k-1)\|_{P_i}$, $\xi_j(k+l|k) = \|x_j^a(k+l|k) - x_j^a(k+l|k-1)\|_{P_i}$ 。证毕。 ■

根据引理 3.3, 可以设计如下的触发条件从而使得 Lyapunov 函数 $V_i(x_i(k|k))$ 保持递减, 进而可以保证系统稳定性

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^{N_i-1} \chi_i(m) + \|\hat{x}_i(k+N_i|k-1)\|_{P_i} + L_{f_{K_i}} \chi_i(N_i-1) \\
 & + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \xi_j(k+N_i-1|k) + e_i(k) > \beta_i \|x_i(k-1)\|_{P_i}, \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

其中 $\beta_i \in (0, 1)$ 是一个常数。

在上述式(3.27)中的触发条件下, 候选 Lyapunov 函数在 $[k_i^r, k_i^{r+1} - 1]$ 区间是单调递减的。然而, 由于状态 $x_i(k)$ 靠近原点时, $\beta_i \|x_i(k-1)\|_{Q_i}^2$ 的值是非常小的 [107], 所以触发条件(3.27)很容易满足, 尤其是存在外部扰动和耦合影响时。因此, 如果触发条件仅仅依赖于条件(3.27), 那么事件将被频繁触发, 从而导致计算和通信负载过高。受到文献 [138] 中的研究启发, 我们进一步提出另外一个条件去进一步降低触发频率。

$$\|x_i(k)\|_{P_i} > e^{-\gamma_i k} \|x_i(0)\|_{P_i} + \delta_i, \quad (3.28)$$

其中 $x_i(0)$ 是子系统 i 的初始值, $\gamma_i > 0$ 和 $0 < \delta_i < \varepsilon/\sqrt{M}$ 是两个常数。

综合条件(3.27)和(3.28)形成下面的并行触发条件

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{m=1}^{N_i-1} \chi_i(m) + \|\hat{x}_i(k+N_i|k-1)\|_{P_i} + L_{f_{K_i}} \chi_i(N_i-1) \\ + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} L_{g_{ij}} \xi_j(k+N_i-1|k) + e_i(k) > \beta_i \|x_i(k-1)\|_{P_i}, \end{array} \right. \quad (3.29a)$$

$$\|x_i(k)\|_{P_i} > e^{-\gamma_i k} \|x_i(0)\|_{P_i} + \delta_i. \quad (3.29b)$$

在大多数 ET-MPC 的研究中, 例如 [112, 120], 只要类似于(3.27)中的条件满足即触发事件。但是在本章提出的触发条件(3.29)中, 只有当两个条件(3.29a)和(3.29b)同时满足时才触发事件。因此, 所提出的触发规则可以更有效地减少触发次数, 从而更有效地降低计算和通信负载。

综合可行性触发条件(3.15)和稳定性触发条件(3.29)形成最终的复合触发条件, 如下

$$(3.15) \text{ 或 } (3.29) \text{ 或 } k - k_i^r \geq N_i. \quad (3.30)$$

如果(3.30)中的任意一个条件满足, 则触发事件, 进而求解(3.7)中的 OCP 和传输最优状态信息并更新触发时刻为 $k_i^{r+1} = k$ 。具体的执行过程将总结在算法3.1中。

3.3.3 复合事件触发分布式模型预测控制算法

为了镇定整个系统, 需要使用状态反馈增益 K_i 。然而, 在图 3.1 所示的控制结构中, 传统的双模策略, 如 [60, 105] 的实现需要周期性地传输系统状态和控制输入, 进而消耗大量通信资源。为了解决这个问题, 当状态进入到集合 \mathbb{X}^a 后,

本文使用状态反馈增益 K_i 以开环的方式生成一个预测控制输入序列，如下所示：

$$\begin{cases} \hat{u}_i(k_i^r + m|k_i^r) = K_i(\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r)) \\ \hat{x}_i(k_i^r + m + 1|k_i^r) = f_i(\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r), \hat{u}_i(k_i^r + m|k_i^r)) \\ \quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k_i^r + m|k_i^r)), \end{cases} \quad (3.31)$$

其中 $m = 0, \dots, N_i - 1$, $\hat{x}_i(k_i^r|k_i^r) = x_i(k_i^r)$, k_i^r 是状态进入集合 \mathbb{X}^a 的时间。

算法 3.1 复合 ET-DMPC 算法

初始化：对于每个子系统，给定初始值 $x_i(0)$ ；根据引理 3.1，计算权重矩阵 Q_i, R_i, P_i ，局部反馈增益 K_i ，集合 \mathbb{X}_i^a ；基于(3.32)，(3.33) 和 (3.41)，选择预测时域 N_i 和控制参数 τ_i, δ_i ；令 $\theta_i = 0$ (θ 是切换信号， $\theta = 1$ 意味着系统状态进入集合 \mathbb{X}_i^a)

- 1 在 k 时刻，每个控制器 i 根据(3.8) 生成 $x_j^a(k+m|k), m = 0, \dots, N_i$ 。
 - 2 测量系统状态 $x_i(k)$ ；检查触发条件(3.30) 是否满足，若满足，设置 $k_i^{r+1} = k$, $r = r + 1$ ，接收 $\hat{\mathbf{x}}_j^*(\eta_j(k))$ or $\hat{\mathbf{x}}_j(\eta_j(k))$ 并且更新 $x_j^a(k+m|k)$ ，到第 3 步。否则，到第 5 步。
 - 3 如果 $\theta_i = 0$ ，则求解 (3.7) 中局部 OCP 获得最优控制输入和最优状态序列 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k)$ 和 $\hat{\mathbf{x}}_i^*(k)$ ；将 $u_i(k) = \hat{u}_i^*(k|k)$ 用到子系统 i ，到第 1 步。否则，到第 4 步。
 - 4 根据 (3.31) 生成控制序列 $\hat{u}_i(k+m|k), m = 0, \dots, N_i - 1$ 和状态序列 $\hat{\mathbf{x}}_i(k)$ ；将 $u_i(k) = \hat{u}_i(k|k)$ 用到子系统 i ；设定 $\theta_i = 1$ ，到第 1 步。
 - 5 如果 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i^a$ 并且 $\theta_i = 0$ ，到第 4 步。否则，到第 6 步。
 - 6 基于 (3.20) 或者 (3.21) 构造 $\bar{u}_i(k+m|k), m = 0, \dots, N_i - 1$ ；将 $u_i(k) = \bar{u}_i(k|k)$ 用到子系统 i ；设定 $k = k + 1$ ，到第 1 步。
-

算法 3.1 总结了所提出的复合 ET-DMPC 算法。对于每个子系统 i ，在每个触发时刻 k_i^r ，其上游邻居的信息根据式(3.8)更新。如果 $x_i \notin \mathbb{X}_i^a$ ，求解(3.7)中的 OCP 得到最优控制输入 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k_i^r)$ 。否则，根据式(3.31)获得控制输入 $\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r)$ 。然后，将控制序列 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k_i^r)$ 或 $\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^r)$ 中的控制输入依次使用到子系统 i 中直到 (3.30) 中的条件满足，并将相应的状态轨迹 $\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^r)$ 或 $\hat{\mathbf{x}}_i(k_i^r)$ 传输给 i 的下游邻居。需要注意的是，对于状态 $x_i(k_i^r) \notin \mathbb{X}_i^a$ ，一旦状态 $x_i(k), k > k_i^r$ 进入集合 \mathbb{X}_i^a ，即使(3.30)中的条件没有满足，也触发事件一次并更新触发时刻为 $k_i^{r+1} = k$ 。

3.4 策略分析

本节首先验证了系统的真实状态约束能够满足，其次分析了 OCP 的迭代可行性和系统的稳定性。

3.4.1 真实状态约束分析

一般情况下，由于存在耦合影响和外部扰动，真实状态约束难以满足。以下定理 3.4 阐述了在 (3.7) 中设计的约束收缩方法可以解决这个问题。

定理 3.4 如果假设 3.1-3.4 成立，则在算法 3.1 下，真实状态满足 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i, \forall k > 0, i \in \mathcal{V}$ 。

证明 根据算法3.1, 在连续两个触发时刻之间施加控制输入产生真实状态轨迹。因此, 证明定理3.4等价于证明 $x_i(k_i^r + m) \in \mathbb{X}_i, \forall m = 1, \dots, \Delta(k_i^{r+1}), i \in \mathcal{V}$ 。

定理的证明分两种情形。情形 1): $x(k_i^r) \notin \mathbb{X}_i^a$ 且 $x(k_i^r) \in \mathbb{X}_i$ 。在这种情形下, 应用求解(3.7)中的局部 OCP 得到的控制输入 $\hat{u}_i^*(k_i^r)$ 。从不等式(3.16) 可得, $\|x_i(k_i^r + m) - \hat{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^r)\|_{P_i} \leq \tau_i, \forall m = 1, \dots, \Delta(k_i^{r+1})$ 。由于 $\hat{x}_i^*(k_i^r + m|k_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m)$, 使用三角不等式可得 $x_i(k_i^r + m) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m) \oplus \tau_i \subseteq \mathbb{X}_i, \forall m = 1, \dots, \Delta(k_i^{r+1})$ 。

情形 2): $x(k_i^r) \in \mathbb{X}_i^a$ 。在这种情形下, 应用控制输入 $\hat{u}_i(k_i^r + m|k_i^r) = K_i(\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r))$ 。依据(3.16)仍然可得 $\|x_i(k_i^r + m) - \hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r)\|_{P_i} \leq \tau_i$ 。根据等式(3.31)和假设3.4, 我们可以得到 $\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r) = f_i(\hat{x}_i(k_i^r + m - 1|k_i^r), \hat{u}_i(k_i^r + m - 1|k_i^r)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k_i^r + m - 1|k_i^r)) \in \mathbb{X}_i^a \subseteq \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(N_i - 1)$ 。因此, 使用三角不等式 $x_i(k_i^r + m) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(N_i - 1) \oplus \tau_i \subseteq \mathbb{X}_i$ 。

结合情形 1) 和情形 2), $x_i(k) \in \mathbb{X}_i, \forall k > 0, i \in \mathcal{V}$ 成立。证毕。 ■

3.4.2 迭代可行性分析

迭代可行性是指 OCP 在初始可解的情况下, 在以后的每个触发时刻总是有解。在证明迭代可行性前, 首先给出初始可行的假设。

假设 3.5 ([131]) 给定系统的初始状态 $x(0) = [x_1^T(0), \dots, x_M^T(0)]^T$, 存在邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i^u$ 的假设状态 $x_j^a(0)$ 使得(3.7)中的 OCP 有解。

基于假设 3.5, 迭代可行性如下定理所示。

定理 3.5 对于系统 (3.4), 在假设 3.1-3.5满足前提下, 如果下述条件满足:

$$\sum_{l=0}^{N_i-1} \max\{L_{f_i}^l, L_{f_{K_i}}^l\} \left(\Gamma_i L_{g_{ij}} \left(N_i \sigma + \frac{4\varepsilon}{5\sqrt{M}} \right) \right) + \max\{L_{f_i}^{N_i}, L_{f_{K_i}}^{N_i}\} \tau_i \leq \sigma, \quad (3.32)$$

$$L_{f_i}^{N_i-1} \tau_i + \frac{(L_{f_i}^{N_i-1} - 1)}{L_{f_i} - 1} N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma \leq \frac{\varepsilon}{5\sqrt{M}}, \quad (3.33)$$

$$\sigma \leq \frac{4(1 - c_i)\varepsilon}{5\sqrt{M}}, \quad (3.34)$$

则 OCP 是迭代可行的。

为了证明此定理, 首先给出一些用于证明定理的引理, 其中引理3.6说明了(3.7b)中的约束能满足, 引理3.7说明了(3.7c)中的收缩约束能满足, 引理 3.8说明(3.7d)中的输入约束可以满足。

引理 3.6 对于系统(3.4), 假设3.1-3.5成立, 如果 OCP 在触发时刻 $k_i^r, \forall i \in \mathcal{V}, r \geq 0$ 有解并且(3.32)中的条件成立, 则有下列不等式

$$\|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) - \bar{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1})\|_{P_i} \leq \sigma, \forall m = 0, \dots, N_i.$$

证明 证明分两种情况讨论。

当 $m = 0, \dots, N_i - \Delta(k_i^{r+1})$, 从式(3.9)中的构造状态可知 $\bar{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r) = \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)$ 。由于状态轨迹 $\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1})$ 和 $\hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)$ 都是使用同一个控制输入生成的, 因此可以迭代地得到如下不等式

$$\begin{aligned}
 & \|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + 1|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + 1|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq L_{f_i} \|\bar{x}_i(k_i^{r+1}|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1}|k_i^r)\|_{P_i} + N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma \\
 & \leq L_{f_i} \tau_i + N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma \\
 & \dots \\
 & \|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq L_{f_i} \|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m - 1|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m - 1|k_i^r)\|_{P_i} + N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma \\
 & \leq L_{f_i}^m \tau_i + \sum_{l=0}^{m-1} L_{f_i}^l N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma. \tag{3.35}
 \end{aligned}$$

当 $m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}) + 1, \dots, N_i$, 有如下不等式成立

$$\begin{aligned}
 & \|\bar{x}_i(k_i^r + N_i + 1|k_i^{r+1}) - \bar{x}_i^*(k_i^r + N_i + 1|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq L_{f_{K_i}} \|\bar{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^r + N_i|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \quad + \Gamma_i L_{g_{ij}} N_i \sigma + \left\| \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(k_i^{r+1} + N_i|k_i^r)) \right\|_{P_i}.
 \end{aligned}$$

由于对于全部的 $m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}) + 1, \dots, N_i$, 有 $\|x_j^a(k_i^{r+1} + m|k_i^r)\|_{P_i} \leq 4\epsilon/(5\sqrt{M})$ 成立, 那么迭代地计算可得到

$$\begin{aligned}
 & \|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq L_{f_{K_i}}^{m+\Delta_{k_i}-N_i} \|\bar{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^r + N_i|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \quad + \sum_{l=0}^{m+\Delta_{k_i}-N_i-1} L_{f_{K_i}}^l \Gamma_i L_{g_{ij}} \left(N_i \sigma + \frac{4\epsilon}{5\sqrt{M}} \right).
 \end{aligned}$$

综合上述两种情况, 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 & \|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)\|_{P_i} \\
 & \leq \max\{L_{f_i}^m, L_{f_{K_i}}^m\} \tau_i + \sum_{l=0}^{m-1} \max\{L_{f_i}^l, L_{f_{K_i}}^l\} \Gamma_i L_{g_{ij}} \left(N_i \sigma + \frac{4\epsilon}{5\sqrt{M}} \right), \tag{3.36}
 \end{aligned}$$

其中 $m = 0, \dots, N_i$ 。考虑到(3.32)中的条件成立, 则最终得到 $\|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)\|_{P_i} \leq \sigma, m = 0, \dots, N_i$ 。证毕。 ■

引理 3.7 对于系统(3.4), 假设 3.1-3.5 成立, 如果 OCP 在触发时刻 $k_i^r, \forall i \in \mathcal{V}, r \geq 0$ 有解并且式(3.33)中的条件成立, 则应用(3.20)或 (3.21)中的控制输入 $\bar{u}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1})$ 生成的状态轨迹 $\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1})$ 满足

$$\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m), \forall m = 1, \dots, N_i - 1$$

证明 证明分为两种情形。

当 $m = 1, \dots, N_i - \Delta(k_i^{r+1})$ 。由式(3.35)和三角不等式可以得到

$$\|\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1})\|_{P_i} \leq \|\hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r)\|_{P_i} + L_{f_i}^m \tau_i + \frac{N_i \Gamma_i (L_{f_i}^m - 1)}{L_{f_i} - 1} L_{g_{ij}} \sigma_i. \quad (3.37)$$

因为 $\hat{x}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m + \Delta(k_i^{r+1}))$, 并结合 (3.10)中 $\mathbb{B}_i(m)$ 的定义, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) &\in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m + \Delta(k_i^{r+1})) \\ &\oplus \left(L_{f_i}^m \tau_i + \frac{N_i \Gamma_i (L_{f_i}^m - 1)}{L_{f_i} - 1} L_{g_{ij}} \sigma_i \right) \\ &\subset \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m). \end{aligned} \quad (3.38)$$

当 $m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}) + 1, \dots, N_i - 1$ 。从(3.35)式可以得到

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(k_i^r + N_i|k_i^r)\|_{P_i} \\ &\leq L_{f_i}^{N_i - \Delta(k_i^{r+1})} \tau_i + \frac{(L_{f_i}^{N_i - \Delta(k_i^{r+1})} - 1)}{L_{f_i} - 1} N_i \Gamma_i L_{g_{ij}} \sigma. \end{aligned} \quad (3.39)$$

由于 $\|\hat{x}_i^*(k_i^r + N_i|k_i^r)\|_{P_i} \leq 4\epsilon/5\sqrt{M}$, 再根据式(3.33)中条件, 可以推出 $\|\bar{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^{r+1})\|_{P_i} \leq \epsilon/\sqrt{M}$, 即 $\bar{x}_i(k_i^r + N_i|k_i^{r+1}) \in \mathbb{X}_i^a$, 其保证了在区间 $[k_i^r + N_i, k_i^{r+1} + N_i - 1]$ 里可以使用状态反馈增益 K_i 。最后, 根据假设3.4, 可知 $\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) \in \Omega_i \subset \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(m)$, $m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}) + 1, \dots, N_i - 1$ 。

结合两种情况, 证毕。 ■

引理 3.8 如果假设3.1-3.5满足, (3.33)中的条件成立并且(3.7)中的 OCP 在 k_i^r 时刻有解, 则输入约束满足, 即 $\bar{u}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) \in \mathbb{U}_i, \forall m = 0, \dots, N_i - 1$ 。

证明 从控制输入构造的(3.20)式可知: 当 $m = 0, \dots, N_i - \Delta(k_i^{r+1}) - 1$ 时, $\bar{u}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) = \hat{u}_i^*(k_i^{r+1} + m|k_i^r) \in \mathbb{U}_i$ 。那么, 还需要证明当 $m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}), \dots, N_i - 1$ 时, $\bar{u}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) \in \mathbb{U}_i$ 。从上述引理3.7可知, $\bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) \in \mathbb{X}_i^a, \forall m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}), \dots, N_i - 1$ 。根据引理 3.1, \mathbb{X}_i^a 是一个约束容许集, 则进一步有 $\bar{u}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) = K_i \bar{x}_i(k_i^{r+1} + m|k_i^{r+1}) \in \mathbb{U}_i, \forall m = N_i - \Delta(k_i^{r+1}), \dots, N_i - 1$ 。因此, 控制输入约束满足。证毕。 ■

基于上述引理，接下来证明定理 3.5。

定理 3.5的证明 定理的证明采用的是数学归纳法。在 $k = 0$ 时刻，由假设 3.5 可知 OCP 是可行的。现假设在 $k_i^r, r > 0, i \in \mathcal{V}$ 时刻 OCP 是可行的，那么剩下就是证明构造的控制输入序列 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{r+1})$ 和与之对应的状态序列 $\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{r+1})$ 对于 OCP 依旧是可行的，其等价于证明 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{r+1})$ 和 $\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{r+1})$ 满足优化问题 (3.7) 中的约束。从上述引理可知，(3.7b) 和 (3.7c) 中的约束满足分别由引理 3.6 和 3.7 得到，(3.7d) 中的控制输入约束满足由引理 3.8 得到。最后还需要说明 (3.7e) 中的终端约束是满足的。通过使用三角不等式可以得到

$$\begin{aligned} & \|\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{r+1} + N_i | k_i^{r+1})\|_{P_i} \\ & \leq \|\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{r+1} + N_i | k_i^{r+1}) - \hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^{r+1} + N_i | k_i^r)\|_{P_i} + \|\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^{r+1} + N_i | k_i^r)\|_{P_i} \\ & \leq \sigma + \|\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^{r+1} + N_i | k_i^r)\|_{P_i}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

由于 $\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^r + N_i | k_i^r) \in \mathbb{X}_i^f$ ，从假设 3.4 中的性质 (b) 可得 $\|\hat{\mathbf{x}}_i^*(k_i^{r+1} + N_i | k_i^r)\|_{P_i} \leq 4c_i \varepsilon / 5 \sqrt{M}$ 。然后，应用式 (3.34) 中的条件则可以得到 $\bar{\mathbf{x}}_i(k_i^{r+1} + N_i | k_i^{r+1}) \leq 4\varepsilon / 5 \sqrt{M}$ ，即终端约束满足。证毕。

注 由式 (3.32) 和 (3.33) 可知 Lipschitz 常数 L_{f_i} 越大，可行的 N_i 和 τ_i 就越小，从而导致结果较为保守。与文献 [131] 中为了保证事件触发算法的可行性将各个子系统的 Lipschitz 常数 L_{f_i} 的公共上界作为最终的 Lipschitz 常数相比，式 (3.32) 和 (3.33) 中的条件考虑了各个子系统的不同特点，允许分别选择各个子系统的 Lipschitz 常数。因此，本章所设计的条件保守性更低。

3.4.3 稳定性分析

本部分中定理 3.9 分析了算法 3.1 下系统的稳定性。

定理 3.9 如果假设 3.1-3.5 成立并且 (3.32)，(3.33) 和 (3.34) 中的条件都满足。那么只要下面条件满足，则在算法 3.1 下整个系统 (3.4) 是稳定的。

$$\tau_i + (N_i - 1)\sigma < \frac{\varepsilon}{5\sqrt{M}}, \quad (3.41)$$

$$\tau_i \leq \frac{(1 - \alpha_i)\varepsilon}{\sqrt{M}}. \quad (3.42)$$

证明 证明定理 3.9 的核心是证明两个论断。论断 1): 所有状态 $x, x \notin \mathbb{X}^a$ 将在有限时间进入集合 \mathbb{X}^a 。论断 2): 状态 x 一旦进入 \mathbb{X}^a 将不会再离开 \mathbb{X}^a 。证明这两个论断等价证明状态轨迹 $x_i(k)$ 在有限时间进入 \mathbb{X}_i^a ，且不再离开 \mathbb{X}_i^a [93]。

论断 1): 这个论断需要验证两个点，即 (P1) 如果只有触发条件 (3.27)，状态轨迹 $x_i(k)$ 会在有限时间进入 \mathbb{X}_i^a ；(P2) 在并行触发条件 (3.29) 下，状态 $x_i(k)$ 依旧能在有限时间进入 \mathbb{X}_i^a 。

(P1) 的证明可以按照文献 [105, 136] 中的思路。用 \bar{k}_i^r 表示仅由触发条件(3.27)决定的子系统 i 的第 r 个触发瞬间。考虑两种情形。

情形 1): 如果在 k 时刻没有触发事件。本章 3.3.2 部分已经说明了 $V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^r|\bar{k}_i^r)) < 0$ 和 $V_i(\bar{x}_i(k|k)) - V_i(\bar{x}_i(k-1|k-1)) < 0$, $\bar{k}_i^r \leq k < \bar{k}_i^{r+1}$ 。

情形 2): 如果 k 时刻触发事件, 不失一般性, 将触发时刻设为 $k = \bar{k}_i^{r+1}$, 则 Lyapunov 函数之差 $V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1})) - V_i(\bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}-1|\bar{k}_i^{r+1}-1))$ 和 $V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1})) - V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^r|\bar{k}_i^r))$ 为

$$\begin{aligned} & V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1})) - V_i(\bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}-1|\bar{k}_i^{r+1}-1)) \\ & \leq -\|x_i(\bar{k}_i^{r+1}-1)\|_{P_i} + \|x_i(\bar{k}_i^{r+1}) - \bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1}-1)\|_{P_i} \\ & \quad + \sum_{m=1}^{N_i-1} \|\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}+m|\bar{k}_i^{r+1}) - \bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}+m|\bar{k}_i^{r+1}-1)\|_{P_i} + \|\bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}+N_i|\bar{k}_i^{r+1})\|_{P_i}. \end{aligned}$$

由于 $\|\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}+m|\bar{k}_i^{r+1}) - \bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}+m|\bar{k}_i^{r+1}-1)\|_{P_i} \leq \|\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}+m|\bar{k}_i^{r+1}) - \hat{x}_i^*(\bar{k}_i^r+m|\bar{k}_i^r)\|_{P_i} \leq \sigma$, $\bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}+N_i|\bar{k}_i^{r+1}) \in \mathbb{X}_i^f$ 和 $x_i(\bar{k}_i^{r+1}-1) \notin \mathbb{X}_i^a$ 成立, 所以进一步地可以推导出

$$\begin{aligned} & V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1})) - V_i(\bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}-1|\bar{k}_i^{r+1}-1)) \\ & \leq -\frac{\varepsilon}{\sqrt{M}} + \tau_i + (N_i-1)\sigma + \frac{4\varepsilon}{5\sqrt{M}}. \end{aligned}$$

因此, 如果(3.41)中的条件成立, 则最终 Lyapunov 函数之差为

$$V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1})) - V_i(\bar{x}_i(\bar{k}_i^{r+1}-1|\bar{k}_i^{r+1}-1)) < 0. \quad (3.43)$$

同理, 我们也可以得到 $V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^{r+1}|\bar{k}_i^{r+1})) - V_i(\hat{x}_i^*(\bar{k}_i^r|\bar{k}_i^r)) < 0$ 。因此, 对于任意 $k > 0$, 有 $\Delta V_i(k) < 0$ 成立, 从而可以推断出状态 $x_i(k)$ 可以在有限时间进入集合 \mathbb{X}_i^a [105, 136]。

(P2) 的证明可以采用反证法。注意触发规则是只有当条件(3.29a)和(3.29b)同时满足时, 事件才会被触发。假设系统状态不能在有限的时间 k 到达集合 \mathbb{X}_i^a , 即不存在有限时间 k 使得系统状态满足 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i^a$ 。那么, 对于任意 $k > 0$, 总是存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\|x_i(k)\|_{P_i} \geq \varepsilon/\sqrt{M} + \varepsilon$ 成立。用 k^* 表示对于任意的时刻 k 且 $k > k^*$, 不等式 $\varepsilon/\sqrt{M} + \varepsilon \geq e^{-\gamma_i k} \|x_i(0)\|_{P_i} + \delta_i$ 总是成立的时刻, 那么对于任意的 $k > k^*$, 就有 $\|x_i(k)\|_{P_i} > e^{-\gamma_i k} \|x_i(0)\|_{P_i} + \delta_i$ 成立, 也即当 $k > k^*$ 时, (3.29b) 中的条件一直满足。进而当 $k > k^*$ 时, 是否触发事件取决于条件 (3.29a) 是否满足。换言之, 当 $k > k^*$ 时, 由条件(3.27)和条件(3.29)决定的触发情况是相同的。(P2) 中反证法假设不存在有限的时间 k 使得 $x_i(k) \in \mathbb{X}_i^a$ 满足, 其与 (P1) 论证的相矛盾。所以, 在并行触发条件(3.29)下, 系统状态依旧能在有限时间进入 \mathbb{X}_i^a 。

论断 2)：一旦状态进入到集合 \mathbb{X}_i^a ，控制输入则切换为(3.31)中构造的反馈增益 K_i 。考虑到触发规则，则不等式 $\|x_i(k_i^r + m) - \hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r)\|_{P_i} \leq \tau_i$ 成立。由假设3.4可得 $\hat{x}_i(k_i^r + m|k_i^r) \in \Omega_i$ ，继而考虑到式(3.42)中的条件，可以得到 $\|x_i(k_i^r + m)\|_{P_i} \leq \varepsilon/\sqrt{M}$ 。这表明即使终端集里触发事件，真实状态不会离开 \mathbb{X}^a 。

综合论断 1) 和论断 2) 完成定理 3.9 的证明。 ■

注 从论断 1) 可知，提出的并行触发不再要求 Lyapunov 函数一直递减。假设在时刻 \bar{k}_i^r ，(3.29a)中的条件满足而(3.29b)中的条件不满足，则不触发事件。直到某个时刻 $k_i^r, k_i^r > \bar{k}_i^r$ ，条件(3.29a) 和 (3.29b) 同时满足，事件被触发。因此，在时间 $[\bar{k}_i^r, k_i^r)$ 内，候选 Lyapunov 函数可能不再保持递减。

注 从定理3.9可知系统的稳定性与预测时域 N_i ，控制参数 σ 和 τ_i 相关。

- 1) 从条件(3.33) 和 (3.41)可知， τ_i 越大， σ 和 N_i 的值越小，这反过来又影响了可行性和闭环稳定性，尽管 τ_i 越大，可以减少通信负载。
- 2) 从条件(3.32), (3.33) 和(3.41)可知，由于使用了 Lipschitz 常数，预测时域 N_i 越大， σ 和 τ_i 越小，结果越保守，尽管一个大的预测时域 N_i 可能会提高控制性能。
- 3) 选择这些控制参数时，可以根据式(3.34) 和(3.42)中的条件首先确定 σ 和 τ_i 的可行范围，然后再根据(3.32)，(3.33) 和 (3.41)选择合适的 N_i 。

3.5 仿真验证

本节通过一个文献 [91] 中的示例验证了所提出的 ET-DMPC 算法的有效性，该示例包含三个物块-弹簧-阻尼子系统，子系统之间通过弹簧相互连接。系统结构图如图3.3 所示。系统的离散时间动态方程表达如下：

$$\begin{aligned}
 x_{11}(k+1) &= x_{11}(k) + T x_{12}(k) \\
 x_{12}(k+1) &= \left(1 - \frac{T h_1}{m_1}\right) x_{12}(k) - \frac{T k_1}{m_1} e^{-x_{11}(k)} x_{11}(k) \\
 &\quad - \frac{T k_c}{m_1} (x_{11}(k) - x_{21}(k)) + \frac{T}{m_1} u_1 + w_1(k) \\
 x_{21}(k+1) &= x_{21}(k) + T x_{22}(k) \\
 x_{22}(k+1) &= \left(1 - \frac{T h_2}{m_2}\right) x_{22}(k) - \frac{T k_2}{m_2} e^{-x_{21}(k)} x_{21}(k) \\
 &\quad - \frac{T k_c}{m_2} (x_{21}(k) - x_{11}(k)) - \frac{T k_c}{m_2} (x_{21}(k) - x_{31}(k)) + \frac{T}{m_2} u_2 + w_2(k) \\
 x_{31}(k+1) &= x_{31}(k) + T x_{32}(k) \\
 x_{32}(k+1) &= \left(1 - \frac{T h_3}{m_3}\right) x_{32}(k) - \frac{T k_3}{m_3} e^{-x_{31}(k)} x_{31}(k) \\
 &\quad - \frac{T k_c}{m_3} (x_{31}(k) - x_{21}(k)) + \frac{T}{m_3} u_3 + w_3(k)
 \end{aligned}$$

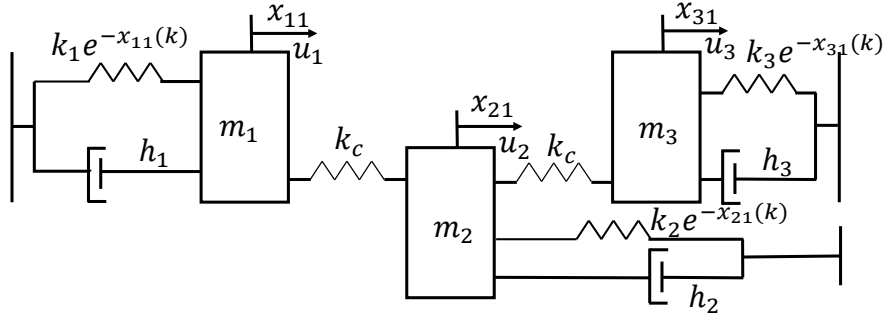


图 3.3 仿真系统的结构图

表 3.1 参数描述

参数	取值	参数	取值
m_1	1 kg	m_2	1 kg
m_3	1.25 kg	k_1	0.8 N/m
k_2	0.15 N/m	k_3	0.5 N/m
k_c	0.015 N/m	h_1	1.2 Ns/m
h_2	1.2 Ns/m	h_3	0.42 Ns/m

其中分量 x_{i1} 和分量 x_{i2} 分别是物块 $i, i = 1, 2, 3$ 的位移和速度。每个物块 i 的局部非线性弹簧刚度为 k_i ，局部粘滞阻尼为 h_i 。不同物块之间相互连接的弹性刚度为 k_c 。 $u_i(k)$ 和 m_i 分别是系统的控制输入和物块的质量， $w_i(k)$ 是系统的外部扰动。 T 是采样时间，可以根据文献 [129] 设置为 $T = 0.2s$ 。系统的这些参数在表 3.1 中给出。每个子系统的状态和控制输入约束设置为 $\mathbb{X}_i = \{x_i : -1\text{m} \leq x_{i1} \leq 1\text{m}, -1\text{m/s} \leq x_{i2} \leq 1\text{m/s}\}$ 和 $\mathbb{U}_i = \{u_i : -1\text{N} \leq u_i \leq 1\text{N}\}$ 。系统的初始状态分别是 $x_1(0) = (0.6, 0)$ ， $x_2(0) = (-0.5, 0)$ ，和 $x_3(0) = (0.5, 0)$ 。外部扰动的上界是 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0.001$ 。

为了实现算法 3.1，权重矩阵分别设置为 $Q_i = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}$ ， $R_i = 0.1, i = 1, 2, 3$ 。使用 LQR 方法设置反馈增益为 $K_1 = [-0.6290 \ -0.9871]$ ， $K_2 = [-1.0655 \ -1.1210]$ ， $K_3 = [-0.7823 \ -1.6816]$ 。为了满足假设 3.3， ΔQ_i 设置为 $\Delta Q_i = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$ ，终端矩阵设置为 $P_1 = \begin{bmatrix} 3.3776 & 0.9837 \\ 0.9837 & 1.5419 \end{bmatrix}$ ， $P_2 = \begin{bmatrix} 3.6225 & 1.2289 \\ 1.2289 & 1.5905 \end{bmatrix}$ ，和 $P_3 = \begin{bmatrix} 3.6424 & 1.3692 \\ 1.3692 & 2.4882 \end{bmatrix}$ 。因此，可以计算出系统的 Lipschitz 常数分别为 $L_{f_1} = 1.1402$ ， $L_{f_2} = 1.0430$ 和 $L_{f_3} = 1.1556$ 。根据引理 3.1，控制参数分别设计为 $\varepsilon = 0.9486$ 和 $\alpha_i = 0.9$ 。然后，根据 (3.28)，(3.34) 和 (3.42) 中的条件，其他控制参数设计为 $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0.5$ ， $\sigma = 0.02$ ， $\tau_1 = 0.0027$ ， $\tau_2 = 0.0021$ ， $\tau_3 = 0.0023$ 。最后根据式 (3.32)，(3.33) 和 (3.41) 中的条件，预测时域可以选为 $N_1 = 6$ ， $N_2 = N_3 = 5$ 。

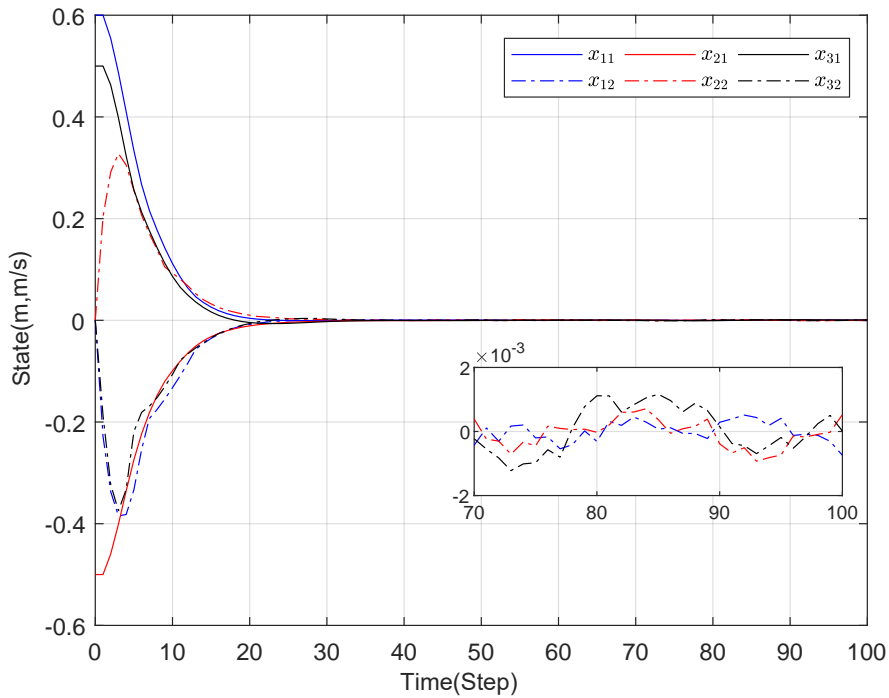


图 3.4 系统的状态轨迹

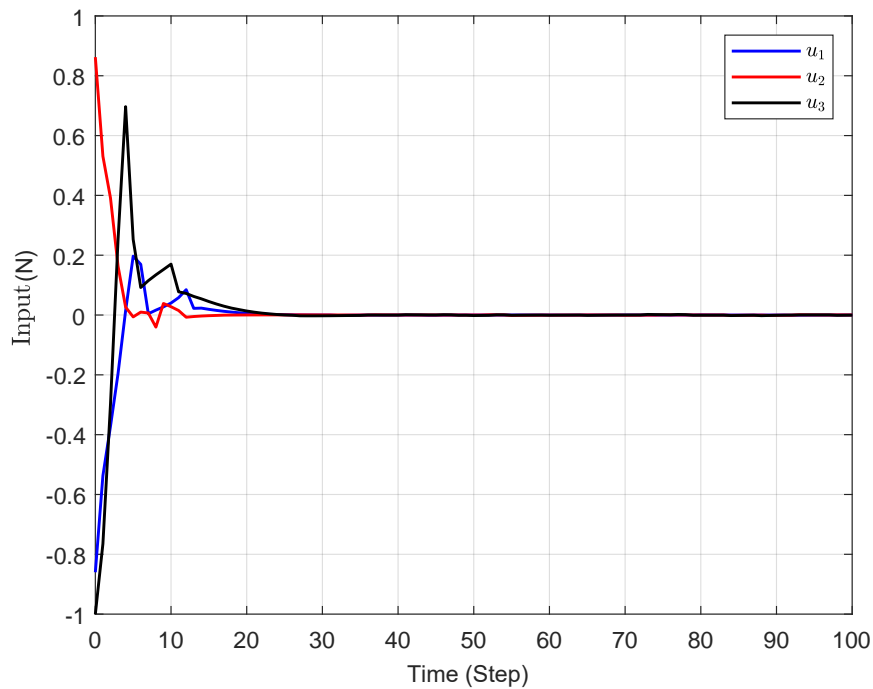


图 3.5 系统的控制输入轨迹

执行算法 3.1 后系统的位移、速度和控制输入如图 3.4 和 3.5 所示。可以看出，系统的实际状态约束和控制输入约束都得到满足，闭环系统是稳定的。为了说明本章提出的算法 3.1 在减少计算和通信负载方面的优势，比较了所提算法 3.1 和文献 [131] 中的算法下的触发时刻和传输时刻，结果如图 3.6 和 3.7 所示。注意， $u = Kx$ 引起的计算资源消耗可以忽略不计，触发次数和传输次数可以分别表示计算资源和通信资源的消耗。可以看出，在仿真的 300 步中，图 3.6 的传输次数分

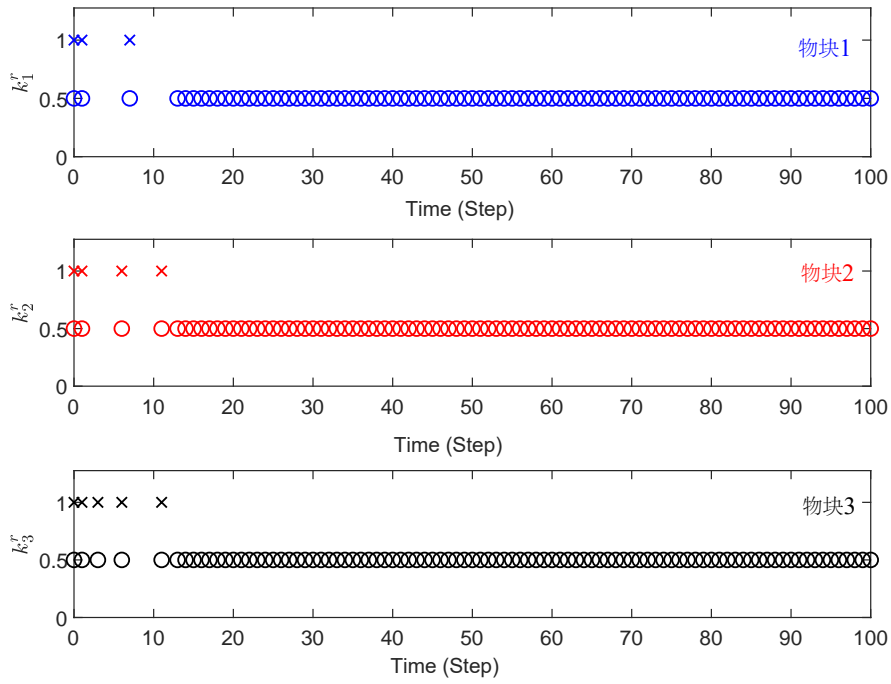


图 3.6 文献 [131] 中算法下的触发时刻 (“x”) 和传输时刻 (“o”)

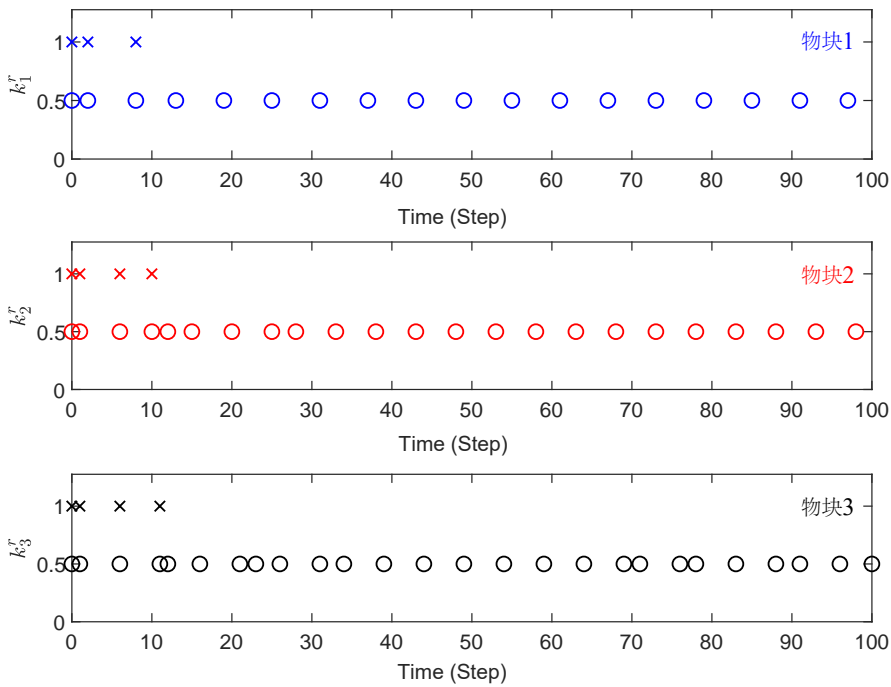


图 3.7 算法3.1下的触发时刻 (“x”) 和传输时刻 (“o”)

别为 12 次和 276 次，图3.7的传输次数分别为 11 次和 67 次。我们可以看到，与文献 [131] 中的算法相比，本章所提的复合事件触发算法具有更低的计算和通信负载。

3.6 本章小结

本章研究了受扰耦合非线性系统的 ET-DMPC 策略设计，提出了复合 ET-DMPC 策略，包含一个复合事件触发条件和一个约束收缩方法。所提策略显著减少了触发次数，从而显著降低计算和通信负载。值得一提的是由于提出的收缩约束方法，即使在扰动和耦合的影响下，系统的真实状态约束仍然满足。提出了保证算法迭代可行和系统闭环稳定的充分条件。最后通过一个仿真案例验证了所提策略的有效性。

第 4 章 受扰非线性系统的扰动预测事件触发分布式 MPC

4.1 引言

实际很多系统都会受到外部干扰，干扰的存在使得以标称动态作为预测模型的预测误差偏大。现有研究主要从两方面来降低由扰动引起的状态预测误差。第一种是针对输入仿射非线性系统，试图通过使用一些干扰抑制技术来抑制干扰。例如 Rubagotti 等人 [139] 中设计了一个积分滑模控制器，以减少具有状态和输入矩阵相关的扰动对系统的影响。讨论了匹配扰动和不匹配扰动两种情况，通过积分滑模控制器的设计保证了扰动项的影响最小化，即可以完全抑制匹配扰动且不放大不匹配扰动。Sun 等人在 [140] 中针对轮式机器人的跟踪问题，提出了一种扰动抑制的分布式模型预测控制方案。在此方案中设计了两个扰动观测器，分别用于估计未知扰动和已知谐波频率的扰动，将扰动观测器与模型预测控制器相结合，提出了一种复合控制器，证明了在已知扰动谐波频率的情况下，系统可以达到无偏移跟踪性能。第二种是预测未来的扰动，并利用预测的扰动来构造模型预测控制，从而生成特定的控制序列。例如 Liao 等人在 [141] 中针对有界扰动约束线性离散系统，提出了一种不匹配扰动补偿积分滑模预测控制方法。基本思想是将离散积分滑模控制问题转化为带模型预测控制的最优约束控制问题，有效地降低了不匹配扰动导致的预测误差。Lin 等人在 [142] 中针对具有可预测加性扰动的线性时不变系统，提出了一种新的鲁棒模型预测控制方法，在优化问题的预测模型中加入了扰动的预测进而增加了预测精度，降低了状态预测误差。所提出的控制方案在约束收缩和终端约束方面具有较小的保守性。注意到，上述研究的是时间驱动下的单个系统的扰动预测，事件触发下的大规模系统如何降低状态预测误差是值得研究的课题。

综上所述，本章首先尝试通过预测扰动来提高一般非线性系统的状态预测精度，在此基础上进一步抑制扰动来提高输入仿射系统的状态预测精度。与前述研究相比主要挑战有：1) 如何预测扰动在预测时域内的演化，从而显式地分析扰动预测误差？2) 如何在邻居系统信息和扰动预测同时存在于局部优化问题的情况下保证迭代可行性和系统稳定性？3) 如何设计触发条件，能够获得高精度预测状态序列带来的好处？本章提出的基于扰动预测的 ET-DMPC 方案解决了上述三个问题。针对输入仿射非线性系统，采用扰动分离方法和匹配扰动的前馈补偿，提出了一种改进的 ET-DMPC 方案。主要工作如下：1) 提出了基于中心化扰动预测方法，基于此分析了扰动导致的状态预测误差；2) 构造了新型局部优化问题，其中扰动预测模型提高了预测精度，新的稳定性约束保证了整体系统稳定；3) 基于优化问题可行性设计了保守性更低的与状态和扰动预测相关的触发

条件。

本章的安排如下，第 4.2 节给出了系统模型，包含系统的一些假设。第 4.3 节给出了具体的扰动预测 ET-DMPC 方案设计，包括基于中心路径的扰动预测方法，基于此设计了局部优化问题，最后是触发条件的设计以及算法可行性分析和系统稳定性分析。第 4.4 节拓展了上述结果，研究了输入仿射非线性系统，基于扰动补偿进一步扩大了触发间隔。

4.2 系统描述

考虑的被控对象由 M 个受扰非线性离散子系统构成，第 i 个子系统的动态方程描述如下：

$$x_i(k+1) = f_i(x_i(k), u_i(k)) + w_i(k), k \geq 0, \quad (4.1)$$

其中 $i = 1, \dots, M$ ， $x_i(k) \in \mathbb{X}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ 是系统的状态， $u_i(k) \in \mathbb{U}_i \subseteq \mathbb{R}^m$ 是系统的控制输入， $w_i(k) \in \mathbb{W}_i \subseteq \mathbb{R}^n$ 是外部扰动。集合 $\mathbb{X}_i, \mathbb{U}_i, \mathbb{W}_i$ 都是紧集且都包含原点。

在各个子系统之间存在着通信网络，通过通信网络每个子系统可以和其邻居子系统交换信息。定义 \mathcal{N}_i 表示子系统 i 的邻居集，则对于子系统 i 来说，其可以接收其邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 的信息。假设每个子系统至少存在一个邻居。

以下给出一些设计算法所需要的系统和外部扰动的假设。

假设 4.1

- 1) 函数 $f_i(x, u)$ 满足 $f_i(0, 0) = 0$ ，并且对于任意的 $x, y \in \mathbb{X}_i$ 有下式成立

$$\|f_i(x, u) - f_i(y, u)\|_{P_i} \leq L_{f_i} \|x - y\|_{P_i}, \forall u_i \in \mathbb{U}_i, \quad (4.2)$$

其中 L_{f_i} 是 Lipschitz 常数， P_i 是一个权重矩阵。

- 2) 对于扰动 $w_i = [w_i^{[1]}, \dots, w_i^{[n]}]^T$ ，存在一个向量 $\eta_i = [\eta_i^{[1]}, \dots, \eta_i^{[n]}]^T$ 使得

$$|w_i^{[l]}| \leq \eta_i^{[l]}, l = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

其中 $\eta_i^{[l]} > 0$ 表示的是扰动分量 $w_i^{[l]}$ 的上界。

- 3) 存在一个向量 $\delta_i = [\delta_i^{[1]}, \dots, \delta_i^{[n]}]^T$ 使得扰动变化满足

$$|w_i^{[l]}(k+1) - w_i^{[l]}(k)| \leq \delta_i^{[l]} < \eta_i^{[l]}, l = 1, \dots, n, \quad (4.4)$$

其中 $\delta_i^{[l]} > 0$ 表示扰动分量 $w_i^{[l]}$ 的最大变化率。

注 注意到条件 1) 反映的是系统的 Lipschitz 连续性，是个常见的假设，Lipschitz 常数依赖于实际系统本身以及权重矩阵 P_i 的选取，相同的假设可见于研究 [143]。条件 3) 说明扰动是缓慢变化的，从而扰动更容易被预测，类似的假设可见于研究 [142]。

4.3 扰动预测事件触发分布式模型预测控制策略设计

本部分介绍基于扰动预测的 ET-DMPC 算法设计。首先，设计了一种基于中心路径的扰动预测方法，并分析了扰动预测误差。其次，利用扰动预测序列和约束收缩集来建立局部 OCP。最后设计了用于保证 OCP 迭代可行的触发机制。

4.3.1 基于中心路径的扰动预测

由于扰动不是剧烈变化的，所以可以用之前的扰动预测扰动的当前值和未来值。 $k-1$ 时刻扰动的真实值为

$$w_i(k-1) = x_i(k) - f_i(x_i(k-1), u_i(k-1)) \quad (4.5)$$

基于中心路径的扰动预测原理图如图4.1所示，主要思想是取扰动可能的最大值和最小值的均值，其中红线表示的是扰动的预测值，阴影部分则是未来扰动真实值的可能区域。可以观察到，红线代表的扰动预测部分是阴影区域的中心路径，因此称此预测方法为中心路径的扰动预测。

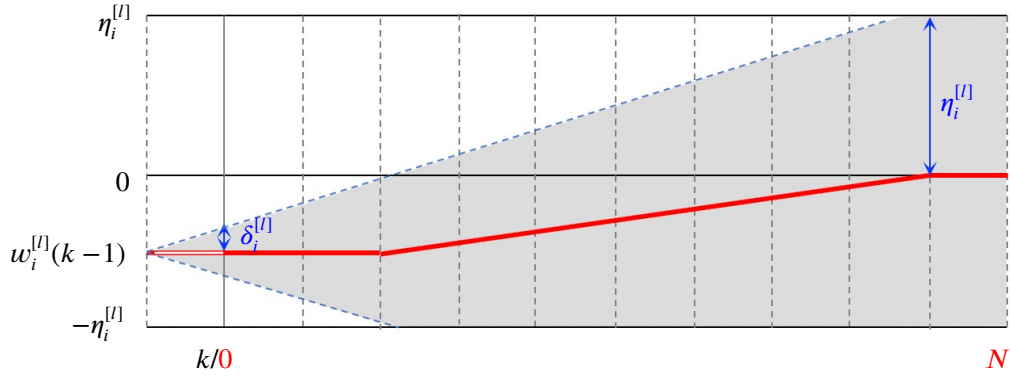


图 4.1 基于中心路径的扰动预测

真实扰动位于阴影区域，红线表示在整个预测时域 N 的扰动预测序列 $\hat{w}_i(k)$ 。

根据原理图，在真实扰动 $w_i(k-1)$ 得到的前提下， $N+1$ 步扰动预测序列 $\hat{w}_i(k) = \{\hat{w}_i(k|k), \dots, \hat{w}_i(k+N|k)\}$ 描述如下：

$$\begin{aligned} \hat{w}_i(k+m-1|k) &= [\hat{w}_i^{[1]}(k+m-1|k), \dots, \hat{w}_i^{[n]}(k+m-1|k)]^T; \\ \hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k) &= \frac{1}{2} \left(\max\{w_i^{[l]}(k-1) - m\delta_i^{[l]}, -\eta_i^{[l]}\} \right. \\ &\quad \left. + \min\{w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\} \right), \quad l = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中 $i = 1, \dots, M$, $m = 0, 1, \dots, N+1$ 并且定义 $\hat{w}_i^{[l]}(k-1|k) = w_i^{[l]}(k-1)$ 。

以下引理 4.1 给出了扰动预测误差的上界，将在设计和分析 ET-DMPC 算法中使用。

引理 4.1 假设扰动满足4.1中的条件 1) 和 2)，那么对于任意的 $m = 0, 1, \dots, N$ 有以下成立：

1. 扰动预测误差满足

$$\|w_i(k+m-1) - \hat{w}_i(k+m-1|k)\|_{P_i} \leq \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \|e_i(m)\|_2, \quad (4.7)$$

其中 $e_i(m) = [\min\{m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\}, \dots, \min\{m\delta_i^{[n]}, \eta_i^{[n]}\}]^T$

2. 扰动 $\hat{w}_i(k+m-1|k)$ 和 $\hat{w}_i(k+m-1|k')$, $k-k' = \Delta$, $\Delta > 0$ 满足

$$\|\hat{w}_i(k+m-1|k) - \hat{w}_i(k+m-1|k')\|_{P_i} \leq \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \|e_i(\Delta)\|_2. \quad (4.8)$$

证明 首先, 证明扰动预测误差满足(4.7)式。根据假设4.1中的扰动的上界、扰动的变化率和扰动预测 $\hat{w}_i^{[l]}(k+m|k)$ 的定义式(4.6)可得:

$$\begin{aligned} & w_i^{[l]}(k+m-1) - \hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k) \\ & \leq \min\{w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\} - \hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k) \\ & \leq \frac{1}{2}(\min\{w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\} - \max\{w_i^{[l]}(k-1) - m\delta_i^{[l]}, -\eta_i^{[l]}\}) \\ & \leq \frac{1}{2}(\min\{w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\} + \min\{-w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\}) \\ & \leq \min\{m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\}. \end{aligned}$$

同理, 可以得到 $\hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k) - w_i^{[l]}(k+m-1) \leq \hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k) - \max\{w_i^{[l]}(k-1) - m\delta_i^{[l]}, -\eta_i^{[l]}\} \leq \min\{m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\}$ 。综合上面两个不等式则可以得到式(4.7)。

其次, 我们验证式(4.8)成立。由扰动预测的定义式(4.6)可得:

$$\begin{aligned} \psi & = |\hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k) - \hat{w}_i^{[l]}(k+m-1|k')| \\ & = \frac{1}{2} \left| \min\{w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\} \right. \\ & \quad - \min\{m\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k-1), \eta_i^{[l]}\} \\ & \quad - \min\{w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]}\} \\ & \quad \left. + \min\{(m+\Delta)\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k'-1), \eta_i^{[l]}\} \right|. \quad (4.9) \end{aligned}$$

注意到 $w_i^{[l]}(k'-1) + \Delta\delta_i^{[l]} \geq w_i^{[l]}(k-1)$ 和 $w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]} \leq w_i^{[l]}(k-1)$, 上式 ψ 的值可以通过分析以下两组情况得到, 即:

$$\begin{aligned} (a) & w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} \leq \eta_i^{[l]}, w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} \leq \eta_i^{[l]}; \\ (b) & w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} > \eta_i^{[l]}, w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} > \eta_i^{[l]}; \\ (c) & w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} > \eta_i^{[l]}, w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} \leq \eta_i^{[l]}; \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} (A) & (m + \Delta)\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k' - 1) < \eta_i^{[l]}, m\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k - 1) < \eta_i^{[l]}; \\ (B) & (m + \Delta)\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k' - 1) \geq \eta_i^{[l]}, m\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k - 1) \geq \eta_i^{[l]}; \\ (C) & (m + \Delta)\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k' - 1) \geq \eta_i^{[l]}, m\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k - 1) < \eta_i^{[l]}; \end{aligned}$$

结合上面两组情况产生 9 种情况, 通过分析以下 9 种情况, 计算(4.9)中的 ψ 的值, 则可以得到引理 4.1 中的结果。令 $e_i^{[l]}(\Delta) \triangleq \min \{ \Delta\delta_i^{[l]}, \eta_i^{[l]} \}$, 则

1) 如果条件 (a) 和 (A) 满足, 则(4.9)进一步改写为:

$$\psi = |w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1)| \leq \Delta\delta_i^{[l]}.$$

从条件 (a) 和 (A) 成立可以得到 $\Delta\delta_i^{[l]} \leq (m + \Delta)\delta_i^{[l]} \leq \eta_i^{[l]}$ 成立。因此, 可以得到不等式 $|\hat{w}_i^{[l]}(k + m - 1|k) - \hat{w}_i^{[l]}(k + m - 1|k')| \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 成立。

2) 如果条件 (a) 和 (B) 满足, 则

$$\psi = \frac{1}{2}|w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - \Delta\delta_i^{[l]}|.$$

由条件 (a) 和 (B) 满足, 一方面可以得到 $|w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - \Delta\delta_i^{[l]}| \leq 2\Delta\delta_i^{[l]}$ 成立; 另一方面由于 $|w_i^{[l]}(k' - 1) + \Delta\delta_i^{[l]}| \leq \eta_i^{[l]}$, 我们可以得到 $|w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - \Delta\delta_i^{[l]}| \leq 2\eta_i^{[l]}$ 。因此, 可以得到不等式 $|\hat{w}_i^{[l]}(k + m - 1|k) - \hat{w}_i^{[l]}(k + m - 1|k')| \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 成立。

3) 如果条件 (a) 和 (C) 满足, 则

$$\psi = \frac{1}{2}|2w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - (m + \Delta)\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]}|.$$

令 $\xi = 2w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - (m + \Delta)\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]}$ 。

一方面可以将 ξ 分成两部分求和形式为:

$$\xi = w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - \Delta\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k - 1) - m\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]}.$$

由于

$$\begin{aligned} -\Delta\delta_i^{[l]} & \leq w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) \leq 0 \\ 0 & \leq w_i^{[l]}(k - 1) - m\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]} \leq \eta_i^{[l]}. \end{aligned}$$

所以可得到 $-2\Delta\delta_i^{[l]} \leq \xi \leq 2\eta_i^{[l]}$ 。

另一方面

$$\begin{aligned} \xi & = 2w_i^{[l]}(k - 1) - w_i^{[l]}(k' - 1) - (m + \Delta)\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]} \\ & \leq 2(w_i^{[l]}(k' - 1) + \Delta\delta_i^{[l]}) - w_i^{[l]}(k' - 1) - (m + \Delta)\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]} \\ & \leq w_i^{[l]}(k' - 1) - m\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]} + \Delta\delta_i^{[l]} \\ & \leq 2\Delta\delta_i^{[l]}. \end{aligned}$$

同时，也可以通过条件 (a) 成立得到：

$$\begin{aligned}\xi &= (2w_i^{[l]}(k-1) - m\delta_i^{[l]} + \eta_i^{[l]}) - w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]} \\ &\geq m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]} \\ &\geq 2m\delta_i^{[l]} - 2\eta_i^{[l]} \\ &\geq -2\eta_i^{[l]},\end{aligned}$$

也就是 $-2\eta_i^{[l]} \leq \xi \leq 2\Delta\delta_i^{[l]}$ 。综上所述，我们可以得到 $\psi \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 。

4) 如果条件 (b) 和 (A) 满足，则由 $w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]} \leq w_i^{[l]}(k-1)$ 可得

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}|w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + \Delta\delta_i^{[l]}| \\ &\leq \frac{1}{2}|\Delta\delta_i^{[l]} + \Delta\delta_i^{[l]}| \leq \Delta\delta_i^{[l]}.\end{aligned}$$

另一方面由于条件 (A) 满足，则 $-w_i^{[l]}(k'-1) < \eta_i^{[l]} - (m+\Delta)\delta_i^{[l]}$ 成立，进一步得到 ψ 的值为

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{1}{2}|w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + \Delta\delta_i^{[l]}| \\ &\leq \frac{1}{2}|w_i^{[l]}(k-1) + \eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]}| \\ &\leq \frac{1}{2}|2\eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]}| \leq \eta_i^{[l]}.\end{aligned}$$

5) 如果条件 (b) 和 (B) 满足，则 $\psi = 0$ 。

6) 如果条件 (b) 和 (C) 满足，则

$$\psi = \frac{1}{2}|\eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k-1)|.$$

由条件 (C) 满足，则可以直接得到 $\eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k-1) \geq 0$ ，此外还可以得到

$$\begin{aligned}\eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k-1) \\ \leq -w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k-1) \leq 2\Delta\delta_i^{[l]}.\end{aligned}$$

与情况 4) 类似可以得到 $\eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k-1) \leq 2\eta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} \leq 2\eta_i^{[l]}$ 。从而可以验证 $\psi \leq e_i^{[l]}(\Delta)$

7) 如果条件 (c) 和 (A) 满足，则

$$\psi = \frac{1}{2}|2w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]}|.$$

类似情况 3)，令 $\xi' = 2w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]}$ 。

一方面可以将 ξ' 分成两部分求和形式为：

$$\xi' = w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + \Delta\delta_i^{[l]} + w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]}.$$

那么容易得到:

$$\begin{aligned} 0 &\leq w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + \Delta\delta_i^{[l]} \leq 2\Delta\delta_i^{[l]} \\ -2\eta_i^{[l]} &\leq w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \leq 0. \end{aligned}$$

另一方面, 由条件 (A) 满足和 $w_i^{[l]}(k-1) \leq \eta_i^{[l]}$ 可以得到:

$$\begin{aligned} \xi' &= 2w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \\ &\leq 2\eta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \\ &\leq 2\eta_i^{[l]}. \end{aligned}$$

由条件 (c) 成立可以得到:

$$\begin{aligned} \xi' &= 2w_i^{[l]}(k-1) - w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \\ &\geq 2(w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]}) - w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \\ &\geq w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} - 2\Delta\delta_i^{[l]} \geq -2\Delta\delta_i^{[l]}. \end{aligned}$$

综上所述, 可以得到 $\psi \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 。

8) 如果条件 (c) 和 (B) 满足, 则

$$\psi = \frac{1}{2}|w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]}|.$$

首先由条件 (c) 成立, 可以直接得到 $\psi = 1/2(w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]}) \leq 0$ 。利用 $w_i^{[l]}(k-1) \geq w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]}$ 和 $w_i^{[l]}(k'-1) + m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \geq -\Delta\delta_i^{[l]}$ 可以进一步得到如下不等式:

$$\psi \geq \frac{1}{2}(-2\Delta\delta_i^{[l]} - m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} + m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]}) \geq -\Delta\delta_i^{[l]}.$$

由 (B) 条件满足, 可以得到 $m\delta_i^{[l]} - \eta_i^{[l]} \geq w_i^{[l]}(k-1)$, 所以进一步得到:

$$\psi \geq \frac{1}{2} \cdot 2w_i^{[l]}(k-1) \geq -\eta_i^{[l]}.$$

综上所述, 可以得到 $\psi \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 。

9) 如果条件 (c) 和 (C) 满足, 则

$$\psi = |w_i^{[l]}(k-1)|.$$

由扰动有界性可以直接得到 $\psi \leq \eta_i^{[l]}$ 。根据条件 (c) 和 (C) 成立, 我们可以得到

$$m\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k-1) \leq \eta_i^{[l]} \leq w_i^{[l]}(k'-1) + (m+\Delta)\delta_i^{[l]}.$$

上式进一步改写为：

$$w_i^{[l]}(k-1) \geq -w_i^{[l]}(k'-1) - \Delta\delta_i^{[l]} \geq -w_i^{[l]}(k-1) - 2\Delta\delta_i^{[l]}.$$

因此， $w_i^{[l]}(k-1) > -\Delta\delta_i^{[l]}$ 成立。此外，根据条件 (c) 和 (C) 成立又可以得到

$$w_i^{[l]}(k-1) + m\delta_i^{[l]} \leq \eta_i^{[l]} \leq (m + \Delta)\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k'-1).$$

上式可以进一步改写为：

$$w_i^{[l]}(k-1) \leq \Delta\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k'-1) \leq 2\Delta\delta_i^{[l]} - w_i^{[l]}(k-1).$$

因此， $w_i^{[l]}(k-1) \leq \Delta\delta_i^{[l]}$ 成立。综上，可以验证 $\psi \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 成立。

综合上述 9 种情况，不等式 $\psi \leq e_i^{[l]}(\Delta)$ 成立，引理 4.1 得以验证。证毕。 ■

为了使得表述方便，定义两个参数 $\bar{\eta}_i \triangleq \|\eta_i\|_2$ 和 $\bar{\delta}_i \triangleq \|\delta_i\|_2$ 。根据 $e_i(m)$ 的定义，可知 $\|e_i(m)\|_2 \leq m\bar{\delta}_i$ 和 $\|e_i(m)\|_2 \leq \bar{\eta}_i$ 。

4.3.2 局部最优控制问题描述

本章的控制结构如图 1.3 所示，子系统之间通过通信网络进行信息交换。由于使用事件触发策略，子系统之间的信息更新可能是异步的。为了描述每个子系统 i 的自身行为，定义在触发时刻 k_i^p ， $p \in \mathbb{N}$ ，其中下标 i 代表的是智能体 i ，上标 p 代表的是第 p 个触发时刻。触发器 i 触发，从而控制器 i 利用接收到的邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 的信息和子系统 i 自身信息求解局部 OCP，并传输子系统 i 自身信息。

为了能在局部 OCP 中利用预测扰动序列 $\hat{w}_i^{[l]}(k)$ ，定义以下预测模型用于预测智能体 i 的未来状态

$$\hat{x}_i(k+1) = f_i(\hat{x}_i(k), u_i(k)) + \hat{w}_i(k). \quad (4.10)$$

对比忽略系统扰动的标称模型，(4.10) 中的预测模型考虑了扰动，从而有潜力产生更为精确的预测轨迹，进而更可能地减少预测误差。

基于上述预测模型的构造，假设在触发时刻 k_i^p 求解得到了 N 步预测控制序列 $\hat{u}_i(k_i^p) = \{\hat{u}_i(k_i^p|k_i^p), \dots, \hat{u}_i(k_i^p + N - 1|k_i^p)\}$ ，那么与之对应的预测控制序列 $\hat{x}_i(k_i^p) = \{\hat{x}_i(k_i^p + 1|k_i^p), \dots, \hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p)\}$ 可以通过预测模型生成，即

$$\hat{x}_i(k_i^p + m + 1|k_i^p) = f(\hat{x}_i(k_i^p + m|k_i^p), \hat{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)) + \hat{w}_i(k_i^p + m|k_i^p),$$

其中 $\hat{x}_i(k_i^p|k_i^p) = x(k_i^p)$ ， $m = 0, \dots, N - 1$ 。

子系统 i 的真实控制输入为 $u_i(k) = \hat{u}_i(k|k_i^p)$ ， $k_i^p \leq k < k_i^{p+1}$ ，也就是控制序列 $\hat{u}_i(k_i^p)$ 中的控制量一直被使用，直到下一个触发时刻 k_i^{p+1} 重新求解得到新的控制输入。

在设计局部 OCP 之前, 我们首先给出以下引理来分析状态预测误差, 将在设计部分用到。

引理 4.2 对于子系统 i , $x_i(k_i^p + m)$ 和 $\hat{x}_i(k_i^p + m|k_i^p)$ 分别表示由系统(4.1)和预测模型(4.10)在使用相同的控制输入 $\hat{u}_i(k_i^p)$ 下, 初始值为 $x_i(k_i^p)$ 生成的真实状态和预测状态。 $\hat{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1})$ 表示使用控制输入 $\hat{u}_i(k_i^p)$ 下, 初始值为 $x(k_i^{p+1})$ 的预测状态, 那么有:

1) 状态预测误差满足:

$$\|x(k_i^p + m) - \hat{x}(k_i^p + m|k_i^p)\|_{P_i} / \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \leq \sum_{s=0}^{m-1} L_P^s \|e_i(m-s)\|_2, \quad (4.11)$$

其中 $e_i(m)$ 在引理 4.1 中定义。

2) 两个预测状态之间的误差满足:

$$\begin{aligned} & \|\hat{x}(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) - \hat{x}(k_i^p + m|k_i^p)\|_{P_i} / \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \\ & \leq \sum_{s=0}^{\Delta_i^p - 1} L_{f_i}^{s+m} \|e_i(\Delta_i^p - s)\|_2 + \sum_{s=0}^{m-1} L_{f_i}^s \|e_i(\Delta_i^p)\|_2, \end{aligned} \quad (4.12)$$

其中 $k_i^{p+1} - k_i^p = \Delta_i^p$ 并且 $m \geq 0$ 。

证明 根据子系统 i 的动态方程(4.1)和预测模型(4.10), 在假设4.1中条件 1) 和引理4.1成立的前提下, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \|x_i(k_i^p + m) - \hat{x}_i(k_i^p + m|k_i^p)\|_{P_i} \\ & \leq \|f_i(x_i(k_i^p + m - 1), \hat{u}_i(k_i^p + m - 1|k_i^p)) + w_i(k_i^p + m - 1) \\ & \quad - f_i(\hat{x}_i(k_i^p + m - 1|k_i^p), \hat{u}_i(k_i^p + m - 1|k_i^p)) + \hat{w}_i(k_i^p + m - 1|k_i^p)\|_{P_i} \\ & \leq L_{f_i} \|x_i(k_i^p + m - 1) - \hat{x}_i(k_i^p + m - 1|k_i^p)\|_{P_i} + \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \|e_i(m)\|_2 \\ & \leq \sum_{s=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} L_{f_i}^s \|e_i(m-s)\|_2, \end{aligned}$$

从而验证式 (4.11) 成立。

基于预测状态 $\hat{x}_i(k_i^p + m)$ 的预测模型(4.10), 在假设4.1和引理4.1成立的前提下, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \|\hat{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^p + m + \Delta_i^p|k_i^p)\|_{P_i} \\ & \leq \|f_i(\hat{x}_i(k_i^{p+1} + m - 1|k_i^{p+1}), \hat{u}_i(k_i^p + m - 1 + \Delta_i^p|k_i^p)) + \hat{w}_i(k_i^{p+1} + m - 1|k_i^{p+1}) \\ & \quad - f_i(\hat{x}_i(k_i^p + m - 1 + \Delta_i^p|k_i^p), \hat{u}_i(k_i^p + m - 1 + \Delta_i^p|k_i^p)) - \hat{w}_i(k_i^p + m - 1 + \Delta_i^p|k_i^p)\|_{P_i} \\ & \leq L_{f_i}^m \|x_i(k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^p + \Delta_i^p)\|_{P_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{s=0}^{m-1} L_{f_i}^s \|\hat{w}(k_i^{p+1} + m - 1 - s | k_i^{p+1}) - \hat{w}_i(k_i^p + m - 1 + \Delta_i^p - s | k_i^p)\|_{P_i} \quad (4.13) \\
 & \leq \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \left(\sum_{s=0}^{\Delta_i^p-1} L_{f_i}^{s+m} \|e_i(\Delta_i^p - s)\|_2 + \sum_{s=0}^{m-1} L_{f_i}^{s+m} \|e_i(\Delta_i^p)\|_2 \right).
 \end{aligned}$$

综上引理4.2得证。证毕。 \blacksquare

由(4.11)可知,在预测扰动的作用下,状态预测误差与研究[55, 106, 112]相比有所减小。事实上,即使对于较大的扰动,只要扰动变化缓慢,这种减少的效果仍然是显著的。

基于上述引理,定义以下约束收缩集 $\mathbb{X}_i(m), m = 0, \dots, N - 1$ 以便于局部优化问题的设计:

$$\mathbb{X}_i(m) = \mathbb{X}_i \ominus \left\{ b : \|b\|_{P_i} \leq \sum_{s=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} (m - s) L_{P_i}^s \bar{\delta}_i \right\}. \quad (4.14)$$

注 在现存的关于模型预测控制的研究中,例如[54, 141],收缩约束集基于状态预测误差上界定义,但是此方法在本章并不适用,原因是本章采用了预测模型(4.10)而不是系统的标称模型,使得式(4.12)中产生了额外的一项 $\sum_{s=0}^{m-1} L_{P_i}^s \|e_i(\Delta_i^p)\|_2$ 。由于 $\|e_i(m)\|_2 + \|e_i(\Delta_i^p)\|_2 \geq \|e_i(m + \Delta_i^p)\|_2$, 多出的这项使得迭代可行性难以保证。为了解决这个问题,我们放大了(4.11)中的误差上界来构造 $\mathbb{X}_i(m)$ 使得 $\|e_i(m - s)\|_2 + \|e_i(\Delta_i^p)\|_2 \leq (m - s + \Delta_i^p) \bar{\delta}_i$ 成立。更为详细的分析将在本章4.3.3部分展开。

考虑到智能体 i 会利用其邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 的信息进行优化,从而定义含有邻居 j 的代价函数:

$$J_i(x_i(k_i^p), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p), \mathbf{x}_j^a(k_i^p)) = J_i^L(x_i(k_i^p), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p)) + J_i^O(x_i(k_i^p), \mathbf{x}_j^a(k_i^p))$$

其中 $J_i^L(x_i(k_i^p), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p))$ 是智能体 i 自身的代价函数, $J_i^O(x_i(k_i^p), \mathbf{x}_j^a(k_i^p))$ 表示的是含有邻居信息的代价函数。

基于上述扰动预测误差、状态预测误差、收缩约束集的定义等,局部 OCP 设计如下:

$$\min_{\mathbf{u}_i(k_i^p)} J_i(x_i(k_i^p), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p), \mathbf{x}_j^a(k_i^p))$$

$$\text{s.t. } \hat{x}_i(k_i^p + m + 1 | k_i^p) = f_i(\hat{x}_i(k_i^p + m | k_i^p), \hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p + m | k_i^p)) + \hat{w}_i(k_i^p + m | k_i^p) \quad (4.15a)$$

$$\hat{x}_i(k_i^p | k_i^p) = x_i(k_i^p) \quad (4.15b)$$

$$\hat{x}_i(k_i^p + m | k_i^p) \in \mathbb{X}_i(m) \quad (4.15c)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p + m | k_i^p) \in \mathbb{U}_i, m = 0, \dots, N - 1 \quad (4.15d)$$

$$\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p) \in \mathbb{X}_i^f \quad (4.15e)$$

$$J_i^L(\hat{x}_i(k_i^p + m|k_i^p), \hat{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)) \leq J_i^L(\bar{x}_i(k_i^p + m|k_i^p), \bar{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)), \quad (4.15f)$$

其中 N 是预测时域, $\mathbf{x}_j^a(k_i^p)$ 表示的是子系统 i 的邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i$ 在 k_i^p 时刻的假设状态序列, $\mathbb{X}_i^f = \{x : \|x\|_{P_i} < \varepsilon_i^f\}$ 是终端约束集。

用 $\hat{\mathbf{u}}_i^*(k_i^p) = \{\hat{u}_i^*(k_i^p|k_i^p), \dots, \hat{u}_i^*(k_i^p + N - 1|k_i^p)\}$ 表示优化问题在 k_i^p 时的 N 步最优控制序列, 用 $\hat{\mathbf{x}}_i(k_i^p) = \{\hat{x}_i(k_i^p|k_i^p), \dots, \hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p)\}$ ($\hat{x}_i(k_i^p|k_i^p) = x_i(k_i^p)$) 表示与之对应的状态序列。基于此, 以下给出代价函数、假设状态、可行控制输入等的定义。

- 假设状态 $x_j^a(k_i^p + m|k_i^p), m = 0, \dots, N, j, j \in \mathcal{N}_i$ 构造如下:

$$x_j^a(k_i^p + m|k_i^p) = \begin{cases} \hat{x}_j(k_i^p + m|\varphi_j(k_i^p)), & m = 0, \dots, N + \varphi_j(k_i^p) - k_i^p \\ A_{ki}\hat{x}_j^a(k_i^p + m|k_i^p), & m = N + \varphi_j(k_i^p) - k_i^p + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.16)$$

其中 $\varphi_j(k_i^p)$ 表示子系统 j 在触发时刻 k_i^p 之前最近的触发时刻, $A_{ki} = A_i + B_i K_i$, $A_i = \partial f_i / \partial x_i(0, 0)$, $B_i = \partial f_i / \partial u_i(0, 0)$, K_i 是使得 A_{ki} 是赫尔维茨的反馈增益。

- 代价函数定义如下:

$$\begin{aligned} & J_i^L(x_i(k_i^p + m|k_i^p), \hat{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} L_i(\hat{x}_i(k_i^p + m|k_i^p), \hat{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)) + F_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p)) \\ & J_i^Q(x_i(k_i^p + m|k_i^p), x_j^a(k_i^p + m|k_i^p)) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} q_{ij}(x_i(k_i^p + m|k_i^p), x_j^a(k_i^p + m|k_i^p)), \end{aligned}$$

其中 $L_i(x, u) = \|x\|_{Q_i}^2 + \|u\|_{R_i}^2$ 是阶段代价, $F_i(x) = \|x\|_{P_i}^2$ 是终端代价, P_i, Q_i, R_i 是三个正定矩阵。 $q_{ij}(x_i, x_j) = \|x_i - x_j\|_{Q_{ij}}^2$, Q_{ij} 是正定矩阵。

- 候选的可行控制输入 $\bar{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)$ 构造如下:

$$\bar{u}_i(k_i^p + m|k_i^p) = \begin{cases} \hat{u}_i^*(k_i^{p-1} + m + \Delta_i^p|k_i^{p-1}), & 0 \leq m \leq N - \Delta_i^p - 1 \\ \kappa_i(\hat{x}_i(k_i^{p-1} + N|k_i^{p-1})), & m = N - \Delta_i^p \\ \kappa_i(\bar{x}_i(k_i^p + m|k_i^p)), & N - \Delta_i^p + 1 \leq m \leq N - 1, \end{cases} \quad (4.17)$$

其中 $\bar{x}_i(k_i^p + m + 1|k_i^p) = f(\bar{x}_i(k_i^p + m|k_i^p), \bar{u}_i(k_i^p + m|k_i^p)) + \hat{w}_i(k_i^p + m|k_i^p)$, $m = 0, \dots, N$, 初始值 $\bar{x}_i(k_i^p|k_i^p) = x_i(k_i^p)$ 。

为了设计触发策略和分析算法可行性, 以下给出一些标准假设 [46, 53, 106]。

假设 4.2 存在一个辅助集合 \mathbb{X}_i^a , 定义为 $\mathbb{X}_i^a = \{x | \|x\|_{P_i} \leq \varepsilon_i^a\}$, 并且存在一个辅助控制律 $\kappa_i(x) : \mathbb{X}_i^f \rightarrow \mathbb{U}_i$ 使得以下成立。

1. $\mathbb{X}_i^a \subseteq \mathbb{X}_i^f \subseteq \mathbb{X}_i(N)$;
2. $f_i(x, \kappa_i(x)) \in \mathbb{X}_i^a, \forall x \in \mathbb{X}_i^f$;
3. $F(f_i(x, \kappa_i(x))) - F(x) \leq -L(x, \kappa_i(x)), \forall x \in \mathbb{X}_i^f$ 。

注 假设4.2是模型预测控制中比较标准的假设 [46, 53]。假设同样提供了权重矩阵 Q_i, R_i, P_i 和集合 $\mathbb{X}_i^a, \mathbb{X}_i^f$ 的设计依据。辅助控制律 $\kappa_i(x)$ 的设计可以参考文献 [1]，即可以使用基于雅克比线性化的 LQR 控制器。

4.3.3 触发条件设计和迭代可行性

本部分首先给出定理 4.3, 其描述了(4.15)中的局部 OCP 迭代可行的条件, 基于此来设计触发条件。

定理 4.3 对于系统(4.1), 在假设 4.1成立的前提下, 局部 OCP(4.15)是迭代可行的如果以下条件成立

$$\bar{\delta}_i \leq \frac{(\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)}\bar{\eta}_i)(L_{f_i} - 1)}{(L_{f_i}^{N+1} - 1)}, \quad (4.18a)$$

$$\bar{\eta}_i \leq (\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a) / \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)}, \quad (4.18b)$$

并且触发机制设计如式 (4.19),

$$\begin{aligned} k_i^{p+1} &= \min\{k_i^p + N, r_i^{p+1}\}, \\ r_i^{p+1} &= \inf_k \left\{ k \left| \sum_{s=0}^{N-(k-k_i^p)} L_{f_i}^{-s} \|\hat{w}_i(k+s|k) - \hat{w}_i(k+s|k_i^p)\|_{P_i}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + L_{f_i} \|x_i(k) - \hat{x}_i(k|k_i^p)\|_{P_i} > \frac{\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)}\bar{\eta}_i}{L_{f_i}^{N-(k-k_i^p)}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

证明 为了说明(4.15)中的优化问题在 k_i^{p+1} 依旧可行, 也就是优化问题在 k_i^{p+1} 依旧有解, 可以构造出 k_i^{p+1} 的可行解, 并说明构造出的可行解满足 OCP 的约束(4.15c)-(4.15f)。 k_i^{p+1} 时刻构造的可行解 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{p+1})$ 方式同式(4.17), 以下验证构造的可行解 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{p+1})$ 满足优化问题中的约束。

1) $\bar{x}(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i(m), \forall m = 1, \dots, N$: 此证明分为两步。

首先证明 $\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i(m), \forall m = 1, \dots, N - \Delta_i^p$ 。利用三角不等式可以得到

$$\begin{aligned} &\|\hat{x}_i(k_i^p + m + \Delta_i^p|k_i^p) + \bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^p + m + \Delta_i^p|k_i^p)\|_{P_i} \\ &\leq \|\hat{x}_i(k_i^p + m + \Delta_i^p|k_i^p)\|_{P_i} + \|\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^p + m + \Delta_i^p|k_i^p)\|_{P_i}. \end{aligned}$$

由于 $\hat{x}_i(k_i^p + m + \Delta_i^p | k_i^p) \in \mathbb{X}_i(m + \Delta_i^p)$ 和 $\|e_i(m)\|_2 \leq m\bar{\delta}_i$, 我们可以进一步推导得到

$$\begin{aligned} \bar{x}_i(k_i^{p+1} + m | k_i^{p+1}) &\in \mathbb{X}_i(m + \Delta_i^p) \oplus \left(\sum_{s=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_{\max}(P)} L_{f_i}^s \|e(\Delta_i^p)\|_2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=0}^{\Delta_i^p-1} \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} L_{f_i}^{s+m} \|e_i(\Delta_i^p - s)\|_2 \right) \\ &\in \mathbb{X}_i(m + \Delta_i^p) \oplus \left(\sum_{s=0}^{m-1} \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \Delta_i^p L_{f_i}^s \bar{\delta}_i \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=m}^{\Delta_i^p+m-1} \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} (\Delta_i^p + m - s) L_{f_i}^s \bar{\delta}_i \right) \\ &\in \mathbb{X}_i(m). \end{aligned}$$

其次证明 $\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m | k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i(m), \forall m = N - \Delta_i^p + 1, \dots, N$ 。为了证明结论, 我们首先说明 $\bar{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i^f$ 成立。

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1})\|_{P_i} \\ &= \|\hat{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1}) + \bar{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1})\|_{P_i} \\ &\leq \|\hat{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1})\|_{P_i} + \|\bar{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1})\|_{P_i} \\ &\leq \|f_i(\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p), \kappa_i(\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p))) + \hat{w}_i(k_i^p + N | k_i^p)\|_{P_i} \\ &\quad + L_{f_i}^{N-\Delta_i^p+1} \|x_i(k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1} | k_i^p)\|_{P_i} \\ &\quad + \sum_{s=0}^{N-\Delta_i^p} L_{f_i}^{N-\Delta_i^p-s} \|\hat{w}_i(k_i^{p+1} + s | k_i^{p+1}) - \hat{w}_i(k_i^{p+1} + s | k_i^p)\|_{P_i}. \end{aligned}$$

由于 $\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p) \in \mathbb{X}_i^f$, 则根据假设 4.2 的性质 2) 可知 $f_i(\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p), \kappa_i(\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p))) + \hat{w}_i(k_i^p + N | k_i^p) \in \mathbb{X}_i^a$, 也就是 $\|f_i(\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p), \kappa_i(\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p))) + \hat{w}_i(k_i^p + N | k_i^p)\|_{P_i} \leq \varepsilon_i^a$ 。此外由触发条件 (4.19) 可得到 $L_{f_i}^{N-\Delta_i^p+1} \|x_i(k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1} | k_i^p)\|_{P_i} + \sum_{s=0}^{N-\Delta_i^p} L_{f_i}^{N-\Delta_i^p-s} \|\hat{w}_i(k_i^{p+1} + s | k_i^{p+1}) - \hat{w}_i(k_i^{p+1} + s | k_i^p)\|_{P_i} \leq \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \bar{\eta}_i + \varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \bar{\eta}_i$ 成立。从而上式可以改写为:

$$\begin{aligned} &\|\bar{x}_i(k_i^p + N + 1 | k_i^{p+1})\|_{P_i} \\ &\leq \varepsilon_i^a + \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \bar{\eta}_i + \varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \bar{\eta}_i \leq \varepsilon_i^f. \end{aligned}$$

根据假设 4.2 中的性质 2) 和 (4.18b) 中的条件, 我们可以认定 \mathbb{X}_i^f 是一个鲁棒正定不变集, 从而进入集合 \mathbb{X}_i^f 的状态将一直在此集合中, 即 $\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m | k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i^f \subseteq \mathbb{X}_i(m), \forall m = N - \Delta_i^p + 1, \dots, N$ 。

- 2) $\bar{x}_i(k_i^{p+1} + N|k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i^f$: 此证明已在 1) 部分得证。
- 3) $\bar{u}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) \in \mathbb{U}_i, m = 0, \dots, N - 1$: 由式(4.17)中的可行控制输入的构造方式可知, 当 $m = 0, \dots, N - \Delta_i^p - 1, \bar{u}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) = \hat{u}_i^*(k_i^p + m + \Delta_i^p | k_i^p) \in \mathbb{U}_i$; 当 $m = N - \Delta_i^p, \dots, N - 1$ 时, 由于上面已证 $\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i^f, \forall m = N - \Delta_i^p + 1, \dots, N$, 那么由假设4.2可知 $\bar{u}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) \in \mathbb{U}_i$ 。
- 4) $J_i^L(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}), \bar{u}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1})) \leq J_i^L(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}), \bar{u}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}))$: 此不等式是自然满足的, 不需要额外的条件。

综合 1) 2) 3) 4), 定理4.3得证。证毕。 ■

为了执行 ET-DMPC 算法, 我们细化每个触发器 i 的作用。首先, 在每个触发 k_i^p , 触发器 i 将远程控制器发送的 N 步状态序列 $\hat{x}_i(k_i^p)$ 和扰动序列 $\hat{w}_i(k_i^p)$ 存储。其次, 在每个采样时刻 k , 触发器 i 根据之前存储的控制输入 $u_i(k - 1)$ 和状态 $x_i(k - 1)$ 以及当前的状态 $x_i(k)$, 计算 $(N + 1)$ 步扰动序列 $\hat{w}_i(k)$ 。然后检测触发条件(4.19), 并且用 $u_i(k)$ 和 $x_i(k)$ 分别覆盖存储的 $u_i(k - 1)$ 和 $x_i(k - 1)$ 。

将上述 ET-DMPC 策略总结为下面的算法4.1。

算法 4.1 基于扰动预测的 ET-DMPC 算法

- 1 测量当前状态 $x_i(k)$;
 - 2 根据式(4.6)生成扰动序列 $\hat{w}_i(k)$;
 - 3 **if** 条件(4.19) 触发 **then**
 - 4 更新触发时刻 $p \leftarrow p + 1, k_i^p = k$;
 - 5 求解 (4.15)中的 OCP 生成 $\hat{x}_i(k_i^p)$ 和 $\hat{u}_i^*(k_i^p)$;
 - 6 **end**
 - 7 将控制输入输入 $\hat{u}_i^*(k|k_i^p)$ 用到系统中;
 - 8 更新时间 $k \leftarrow k + 1$, 回到第 1 步
-

注 触发条件(4.19)与常规的触发条件有以下两点不同。

- 1) 与常规阈值恒定的触发条件如 [106, 144] 不同, (4.19)中的触发阈值 $(\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)}\bar{\eta}_i)/L_{f_i}^{N-(k-k_i^p)}$ 是时变的, 且随触发间隔 $k - k_i^p$ 而增大。因此, 可以降低触发次数。
- 2) 在触发条件中加入扰动预测误差, 似乎使该条件更容易被触发。但当扰动变化较慢时, 扰动预测误差的影响较小, 状态预测误差也较小。因此, 所提出的触发条件适用于缓慢变化的扰动。

注 为了执行 ET-DMPC 算法, 事件通常在初始时间 k_i^0 自动触发。但是在算法4.1中, 在 $k_i^0 + 1$ 触发时刻需要初始预测扰动序列 $\hat{w}_i(k_i^0)$, 然而构造 $\hat{w}_i(k_i^0)$ 依赖的状态 $x_i(k_i^0 - 1)$ 和控制输入 $u_i(k_i^0 - 1)$ 是不可获得的。因此, 为了解决这个问题, 让事件自动触发两次, 也就是设置 $k_i^1 = k_i^0 + 1$ 。

注 算法 4.1与基于周期性的扰动预测模型预测控制算法和传统的 ET-DMPC 算法有两个不同之处。

- 1) 与文献 [142] 中从所有可能的扰动实现中任意选择扰动预测序列的扰动预测方法相比, (4.6)中的方法扰动预测误差更低。
- 2) 与文献 [105-106] 中的 OCP 和事件触发条件相比, (4.15)中的 OCP 在保证递归可行性的同时明确考虑了扰动预测误差, (4.19)中的触发条件依赖于状态和扰动的预测误差, 降低了触发频率。

4.3.4 稳定性分析

本部分分析了在设计的 ET-DMPC 策略下系统的稳定性, 定理4.4给出了整个系统 ISS 稳定性结论。

定理 4.4 如果假设 4.1 和4.2成立, 定理4.3中的条件成立, 则整体系统在算法4.1下是 ISS 稳定的。

证明 定理的证明分为两步。1) 证明存在 $\bar{\beta}_i \in \mathcal{KL}$ 和 $\bar{\eta}_i \in \mathcal{K}$ 使得 $\|x(k_i^p)\| \leq \bar{\beta}(\|x(k_0)\|, k_i^p - k_0) + \bar{\gamma}(\bar{\eta})$ 在每个触发时刻 k_i^p 成立。2) 证明存在 $\beta_i \in \mathcal{KL}$ 和 $\eta_i \in \mathcal{K}$ 使得 $\|x(k)\| \leq \beta(\|x(k_0)\|, k - k_0) + \gamma(\bar{\eta})$ 在所有时刻 $k, k \in [k_i^p, k_i^{p+1})$ 成立。根据研究 [145], 在 1) 成立的前提下, 2) 就可以直接得到, 因此以下只证明 1)。

根据研究 [54] 中的结果, 1) 可以通过证明代价函数 $J_i^L(x_i(k_i^p + m|k_i^p), u_i(k_i^p + m|k_i^p))$ (简记为: $J_i^L(x_i(k_i^p))$) 是子系统 i 的一个 ISS Lyapunov 函数, 即验证 $J_i^L(x_i(k_i^p))$ 满足以下两点:

1. $J_i^L(x_i(k_i^p)) \geq \alpha_1(\|x_i(k_i^p)\|), \forall x_i(k_i^p) \in \mathbb{X}_i$ 且 $J_i^L(x_i(k_i^p)) \leq \alpha_2(\|x_i(k_i^p)\|), \forall x_i(k_i^p) \in \mathbb{X}_{f_i}$ 成立, 其中 $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ 。
2. $J_i^L(x_i(k_i^{p+1})) - J_i^L(x_i(k_i^p)) \leq \alpha_3(\|x_i(k_i^p)\|) + \sigma(\bar{\eta}_i), \forall x_i(k_i^p) \in \mathbb{X}_i$, 其中 $\alpha_3 \in \mathcal{K}, \sigma \in \mathcal{K}_\infty$ 。

根据研究 [54], 第 1 点很容易得到。以下证明第 2 点。在假设 4.2 成立的前提下, 易知存在 $\rho_i \in \mathcal{K}_\infty$ 使得 $F_i(f_i(x, \kappa_i(x)) + w_i) - F_i(x) \leq -L_i(x, \kappa_i(x)) + \rho_i(\bar{\eta}_i), \forall x \in \mathbb{X}_i^f$ 成立, 进一步我们可以得到

$$\begin{aligned} F_i(\hat{x}_i(k_i^p + N + 1|k_i^p)) &\leq F_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p)) \\ &\quad - L_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p), \kappa_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p))) + \rho_i(\bar{\eta}_i), \end{aligned} \quad (4.20)$$

其中 $\hat{x}_i(k_i^p + N + 1|k_i^p) = f_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p), \kappa_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p))) + \hat{w}_i(k_i^p + N|k_i^p)$ 。同理, 由于 $\bar{x}_i(k_i^{p+1} + N - \Delta_i^p + m|k_i^{p+1}) \in \mathbb{X}_i^f, m = 1, \dots, \Delta_i^p$ (定理4.3已证), 可以得到

$$\begin{aligned} F_i(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + N|k_i^{p+1})) &\leq (\Delta_i^p - 1)\rho_i(\bar{\eta}) + F_i(\bar{x}_i(k_i^p + N - 1|k_i^{p+1})) \\ &\quad - \sum_{s=N-\Delta_i^p+1}^{N-1} L_i(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1}), \bar{u}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1})), \end{aligned} \quad (4.21)$$

其中 $\bar{\mathbf{u}}_i(k_i^{p+1})$ 是在(4.17)中构造的可行控制输入。

根据 $J_i^L(x_i)$ 的定义以及约束 (4.15f)可以得到

$$\begin{aligned}
 & J_i^L(x_i(k_i^{p+1})) - J_i^L(x_i(k_i^p)) \\
 & \leq J_i^L(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}), \bar{u}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1})) - J_i^L(\hat{x}_i(k_i^p + m|k_i^p), \hat{u}_i^*(k_i^p + m|k_i^p)) \\
 & \leq \sum_{s=0}^{N-\Delta_i^p} L_i(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1}), \bar{u}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1})) \\
 & \quad + \sum_{s=N-\Delta_i^p+1}^{N-1} L_i(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1}), \bar{u}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1})) + F_i(\bar{x}_i(k_i^{p+1} + N|k_i^{p+1})) \\
 & \quad - \sum_{s=0}^{N-1} L_i(\hat{x}_i(k_i^p + s|k_i^p), \hat{u}_i^*(k_i^p + s|k_i^p)) - F_i(\hat{x}_i(k_i^p + N|k_i^p)). \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

定义 $L_F \triangleq 2 \min_{x_i \in \mathbb{X}_i^f} \|x_i\|_{P_i}$, $L_Q \triangleq 2 \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q_i)}{\lambda_{\min}(P_i)}} \min_{x_i \in \mathbb{X}_i} \|x_i\|_{Q_i}$, 则有以下不等式成立:

$$\begin{aligned}
 \|x\|_{P_i}^2 - \|y\|_{P_i}^2 & \leq L_F \|x - y\|_{P_i}, \forall x, y \in \mathbb{X}_i^f, \\
 \|x\|_{Q_i}^2 - \|y\|_{Q_i}^2 & \leq L_Q \|x - y\|_{P_i}, \forall x, y \in \mathbb{X}_i. \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

将式(4.20), (4.21)和 (4.23) 代入到 (4.22), 并结合式(4.12)可以得到

$$\begin{aligned}
 & J_i^L(x_i(k_i^{p+1})) - J_i^L(x_i(k_i^p)) \\
 & \leq -\|x_i(k_i^p)\|_{Q_i}^2 + \sum_{m=0}^{N-\Delta_i^p} \|\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1})\|_{Q_i}^2 - \|\hat{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^p)\|_{Q_i}^2 \\
 & \quad - \|\hat{x}_i(k_i^p + N + 1|k_i^p)\|_{P_i}^2 + \|\bar{x}_i(k_i^p + N + 1|k_i^{p+1})\|_{P_i}^2 + \Delta_i^p \rho(\bar{\eta}_i) \\
 & \leq -\|x_i(k_i^p)\|_{Q_i}^2 + \sum_{m=0}^{N-\Delta_i^p} L_Q \|\bar{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1} + m|k_i^p)\|_{P_i} \\
 & \quad + L_F \|\hat{x}_i(k_i^p + N + 1|k_i^p) - \bar{x}_i(k_i^p + N + 1|k_i^{p+1})\|_{P_i} + \Delta_i^p \rho(\bar{\eta}_i) \\
 & \leq -\|x_i(k_i^p)\|_{Q_i}^2 + \alpha(\bar{\eta}_i), \tag{4.24}
 \end{aligned}$$

其中 $\sigma(\bar{\eta}_i) \triangleq \Delta_i^p \rho_i(\bar{\eta}_i) + \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \left(\sum_{m=0}^{N-\Delta_i^p} L_Q \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Q_i)}{\lambda_{\min}(P_i)}} \frac{L_{f_i}^{m+\Delta_i^p-1}}{L_{f_i}-1} + L_F \frac{L_{f_i}^{N+1-1}}{L_{f_i}-1} \right) \bar{\eta}_i$ 。从而第 2 点得到证明。

根据研究 [145] 中的定理 1, 可以证明 2) 也是成立的, 从而证明整个系统是 ISS 稳定的。证毕。 \blacksquare

4.4 输入仿射非线性情况

基于上节讨论的情况, 本节研究输入仿射非线性系统。采用扰动分解补偿方法得到了保守性较低的结果。

4.4.1 系统描述和扰动分解

考虑系统(4.1)中子系统 i 的系统动态 $f_i(x_i, u_i)$ 的形式如下:

$$f_i(x_i, u_i) = g_i(x_i) + B_i(x_i)u_i, \quad (4.25)$$

其中矩阵 $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是状态相关的。对于有上述形式的系统(4.1), 同样假设4.1也是成立的。

从上一节的定理4.3可知, 扰动在触发时刻的决定中起着重要的作用。如果采用一些额外的扰动抑制方法则可以获得更大的触发间隔。首先, 将不匹配的扰动 $w_i^U(k)$ (即存在 $x_i \in \mathbb{X}_i$, 使得 $w_i^U(k) \notin \text{Range}(B_i(x))$) 和匹配的扰动 $w_i^M(k)$ (即对于任意的 $x_i \in \mathbb{X}_i$, $w_i^M(k) \in \text{Range}(B_i(x_i))$) 分开。整体扰动表达如下:

$$w_i(k) = w_i^M(k) + w_i^U(k), \quad (4.26a)$$

$$w_i^M(k) = B_i(x)G_i(x_i)w_i(k), \quad (4.26b)$$

$$w_i^U(k) = (I - B_i(x)G_i(x_i))w_i(k), \quad (4.26c)$$

其中 $G_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是一个状态相关的矩阵。

$G_i(x_i)$ 在上述分解中起着重要的作用。事实上, 由于匹配的扰动可以通过前馈补偿抵消, 而不匹配的扰动不能 [56], 所以我们希望(4.26)中的 w_i^U 尽可能小。具体来说, 我们需要选择一个合适的 $G_i(x_i)$, 以使 $\|w_i^U\|_{P_i}$ 最小化。

引理 4.5 选择 $G_i(x_i) = (B_i^T(x_i)P_i B_i(x_i))^{-1} B_i^T(x_i)P_i$ 可以使得 $\|w_i^U\|_{P_i}$ 达到最小, 即,

$$(B_i^T(x_i)P_i B_i(x_i))^{-1} B_i^T(x_i)P_i = \arg \min_{G_i(x)} \|(I - B_i(x_i)G_i(x_i))w_i\|_{P_i}.$$

证明 设 V_i 是一个可逆矩阵且满足 $V_i^T V_i = P_i$, 则有

$$\|(I - B_i(x_i)G_i(x_i))w_i\|_{P_i} = \|V_i(I - B_i(x_i)G_i(x_i))w_i\|_2$$

成立。令 $\mathbb{X}_i^f = V_i \mathbb{X}_i$ 和 $\varphi_i = G_i(x_i)w_i$, 然后采用与文献 [146] 中的命题 2 类似的方法, 那么以下的优化问题:

$$\min_{\varphi_i \in \mathbb{R}^m} \|\varphi_i - V_i B_i(x_i) \varphi_i\|_2, \quad (4.27)$$

有最优解 $\varphi_i^* = (B_i^T(x_i)V_i^T V_i B_i(x_i))^{-1} B_i^T(x_i)V_i^T \phi_i$ 。

令 $G_i(x_i) = (B_i^T(x_i)P_iB_i(x_i))^{-1}B_i^T(x_i)P_i$, 我们可以得到

$$\varphi_i = (B_i^T(x_i)P_iB_i(x_i))^{-1}B_i^T(x_i)P_iw_i = \varphi_i^*$$

进而引理得证。证毕。 ■

我们可以看出当 $G_i(x_i) = \mathbf{0}$ 时, $\|w_i^U\|_{P_i} = \|w_i\|_{P_i}$ 。由于选择合适的 $G_i(x_i)$ 可以最小化 $\|w_i^U\|_{P_i}$, 那么可以得到 $\|w_i^U\|_{P_i} \leq \|w_i\|_{P_i}$ 。这就表明可以通过对匹配扰动进行补偿, 降低了不确定性。

4.4.2 事件触发分布式模型预测控制算法设计

本部分介绍了(4.25)中的输入仿射非线性系统的 ET-DMPC 方案设计。

1. 控制序列的计算

为了降低预测模型的复杂度, 我们将控制输入分为两部分, 分别处理匹配扰动和不匹配扰动。具体来说, 控制输入 u_i 形式如下:

$$u_i(k) = v_i(k) + v_i(k), \quad (4.28)$$

其中 $v_i(k)$ 通过求解优化问题得到, 并且 $v_i(k)$ 采用以下控制律来补偿匹配扰动:

$$v_i(k) = -G_i(\hat{x}_i(k))\hat{w}_i(k). \quad (4.29)$$

将式(4.28)和(4.29)代入到式(4.10)和(4.25)形成如下新的预测模型

$$\hat{x}_i(k+1) = g_i(\hat{x}_i(k)) + B_i(\hat{x}_i(k))v_i(k) + \hat{w}_i^U(k). \quad (4.30)$$

由于 x_i 和 w_i 都是有界的, 所以存在一个有界的集合 \mathcal{V}_i 使得 $v_i(k) \in \mathcal{V}_i$ 。那么, 如果 $v_i(k) \in \mathcal{U}_i \ominus \mathcal{V}_i$, 则可以得到 $u_i(k) \in \mathcal{U}_i$ 。

基于上述准备, 子系统 i 对应的局部 OCP 定义如下:

$$\min_{v_i(k_i^p)} J_i(x_i(k_i^p), v_i(k_i^p), x_j^a(k_i^p))$$

$$\begin{aligned} \text{s.t. } \hat{x}_i(k_i^p + j + 1 | k_i^p) &= g_i(\hat{x}_i(k_i^p + j | k_i^p)) + \hat{w}_i^U(k_i^p + j | k_i^p) \\ &\quad + B_i(\hat{x}_i(k_i^p + j | k_i^p))v_i(k_i^p + j | k_i^p) \end{aligned} \quad (4.31a)$$

$$\hat{x}_i(k_i^p | k_i^p) = x_i(k_i^p) \quad (4.31b)$$

$$\hat{x}_i(k_i^p + j | k_i^p) \in \mathbb{X}_i(j) \quad (4.31c)$$

$$v_i(k_i^p + j | k_i^p) \in \mathcal{U}_i \ominus \mathcal{V}_i, \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (4.31d)$$

$$\hat{x}_i(k_i^p + N | k_i^p) \in \mathbb{X}_i^f \quad (4.31e)$$

$$J_i^L(\hat{x}_i(k_i^p + m | k_i^p), u_i(k_i^p + m | k_i^p)) \leq J_i^L(\bar{x}_i(k_i^p + m | k_i^p), \bar{u}_i(k_i^p + m | k_i^p)), \quad (4.31f)$$

其中 $\hat{w}_i^U(k_i^p + j|k_i^p) = (I - B_i(\hat{x}_i(k_i^p + j|k_i^p)))G_i(\hat{x}_i(k_i^p + j|k_i^p)) \times \hat{w}_i(k_i^p + j|k_i^p)$ 。 $\mathbb{X}_i(j)$ 和 $J_i(x_i(k_i^p), v_i(k_i^p), \mathbf{x}_j^a(k_i^p)) = J_i^L(x_i(k_i^p), v_i(k_i^p)) + J_i^O(x_i(k_i^p), \mathbf{x}_j^a(k_i^p))$ 保持与(4.15)同样的形式和参数。需要注意的是由于(4.31d)中的控制约束改变了, 所以集合 \mathbb{X}_i^f 和 \mathbb{X}_i^a 需要重新设计以满足假设 4.2。

在每个触发时刻 k_i^p , 求解(4.31)中的局部 OCP 产生 N 步预测控制序列 $\mathbf{v}_i^*(k_i^p) = \{v_i^*(k_i^p|k_i^p), \dots, v_i^*(k_i^p + N - 1|k_i^p)\}$, 然后生成与之对应的预测状态序列 $\hat{\mathbf{x}}_i(k_i^p)$ 。结合式(4.28)和(4.29), 真实的 N 步控制序列 $\hat{\mathbf{u}}_i(k_i^p) = \{\hat{u}_i(k_i^p|k_i^p), \dots, \hat{u}_i(k_i^p + N - 1|k_i^p)\}$ 的具体表达式如下:

$$\hat{u}_i(k_i^p + j|k_i^p) = v_i^*(k_i^p + j|k_i^p) - G_i(\hat{x}_i(k_i^p + j|k_i^p))\hat{w}_i(k_i^p + j|k_i^p). \quad (4.32)$$

2. 触发条件和迭代可行性

为了说明算法的迭代可行性, 我们重新考虑引理4.2中状态预测误差。事实上, 可以验证引理4.2中的(4.11)和(4.12)依旧成立。特别地, 对于(4.12)中的预测状态差 $\|\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1} + j|k_i^p)\|_{P_i}$ 存在一个更小的上界。

定义一个与状态相关的矩阵 $\Gamma_i(x) = I - B_i(x)G_i(x)$ 和一个正常数 L_{Γ_i} 使得对于任意 $x, y \in \mathbb{X}_i$ 有 $\|V(\Gamma_i(x) - \Gamma_i(y))\| \leq L_{\Gamma_i}\|x - y\|_{P_i}$ 成立, 其中 $P_i = V_i^T V_i$ 。注意到对于 $w_i \in \mathbb{W}_i$ 有以下不等式成立:

$$\begin{aligned} \|(\Gamma_i(x) - \Gamma_i(y))w_i\|_{P_i} &= \|V(\Gamma_i(x) - \Gamma_i(y))w_i\|_2 \\ &\leq \|V(\Gamma_i(x) - \Gamma_i(y))\| \|w_i\|_2 \leq L_{\Gamma_i}\|w_i\|_2 \|x - y\|_{P_i}, \end{aligned}$$

那么可以得到预测状态为:

$$\begin{aligned} &\|\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1} + j|k_i^p)\|_{P_i} \\ &\leq \bar{L}_{f_i}\|\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^p)\|_{P_i} \\ &\quad + \|\Gamma_i(\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^{p+1}))\hat{w}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^{p+1}) \\ &\quad - \Gamma_i(\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^p))\hat{w}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^p)\|_{P_i} \\ &\leq (\bar{L}_{f_i} + L_{\Gamma_i}\|\hat{w}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^{p+1})\|_2)\|\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^{p+1}) \\ &\quad - \hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^p)\|_{P_i} + \|\Gamma_i(\hat{x}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^p)) \\ &\quad \times (\hat{w}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^{p+1}) - \hat{w}_i(k_i^{p+1} + j - 1|k_i^p))\|_{P_i} \\ &\leq \prod_{s=0}^{j-1} \left(\bar{L}_{f_i} + L_{\Gamma_i}\|\hat{w}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1})\|_2 \right) \|x_i(k_i^{p+1}) - \hat{x}_i(k_i^{p+1}|k_i^p)\|_{P_i} \\ &\quad + \sum_{s=0}^{j-1} \prod_{r=s}^{j-2} \left(\bar{L}_{f_i} + L_{\Gamma_i}\|\hat{w}_i(k_i^{p+1} + r|k_i^{p+1})\|_2 \right) \|\Gamma_i(\hat{x}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^p)) \\ &\quad \times (\hat{w}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^{p+1}) - \hat{w}_i(k_i^{p+1} + s|k_i^p))\|_{P_i}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

其中 \bar{L}_{f_i} 是使得不等式 $\|g_i(x) - B_i(x)u - g_i(y) - B_i(y)u\|_{P_i} \leq \bar{L}_{f_i} \|x - y\|, \forall u \in \mathcal{U}_i \ominus \mathcal{V}_i, \forall x, y \in \mathbb{X}_i$ 成立的常数。由于控制约束的改变导致 $\bar{L}_{f_i} \leq L_{f_i}$ (L_{f_i} 是假设4.1给出的常数)。

基于上式(4.33), 遵循定理4.3中建立迭代可行性的思想, 可以得到以下关于输入仿射系统的触发条件设计以及迭代可行性的结果。

定理 4.6 对于输入仿射非线性系统, (4.31)中的 OCP 是迭代可行的, 如果扰动满足(4.18)并且触发条件设计如下:

$$\begin{aligned} k_i^{p+1} &= \min\{k_i^p + N, r_i^{p+1}\}, \\ r_i^{p+1} &= \inf_k \left\{ k \left| \sum_{s=0}^{N-(k-k_i^p)} \prod_{r=s}^{N-(k-k_i^p)-1} \left(\bar{L}_{f_i} + L_{\Gamma_i} \|\hat{w}_i(k+r|k)\|_2 \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left\| \Gamma_i(\hat{x}_i(k+s|k_i^p))(\hat{w}_i(k+s|k) - \hat{w}_i(k+s|k_i^p)) \right\|_{P_i} \right. \\ &\quad \left. + \prod_{s=0}^{N-(k-k_i^p)} \left(\bar{L}_{f_i} + L_{\Gamma_i} \|\hat{w}_i(k+s|k)\|_2 \right) \|x_i(k) - \hat{x}_i(k|k_i^p)\|_{P_i} \right. \\ &\quad \left. > \varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \bar{\eta}_i \right\}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

证明 此定理的证明与上一节定理4.3的证明类似, 因此在这里省略。 ■

注 以下两点需要注意。

1. 如果 B_i 是一个常值矩阵。在这样的情况下, 令 $L_{\Gamma_i} = 0$ 和 $\Gamma_i = I - B_i(B_i^T P_i B_i)^{-1} B_i^T P_i$, 那么触发条件(4.34)中的不等式则变为:

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{N-(k-k_i^p)} \bar{L}_{f_i}^{-s} \|\Gamma_i \times (\hat{w}_i(k+s|k) - \hat{w}_i(s+k|k_i^p))\|_{P_i} \\ &+ \bar{L}_{f_i} \|x_i(k) - \hat{x}_i(k|k_i^p)\|_{P_i} > \frac{\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a - \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)} \bar{\eta}_i}{L_{f_i}^{N-(k-k_i^p)}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

可以发现式(4.35)与式(4.19)类似。但是与式(4.19)相比, 式(4.35)的左边通过对匹配扰动进行补偿进一步减小不确定性, 从而带来更大的触发间隔。

2. 如果 w_i 是匹配扰动。在这种情况下, $\Gamma_i(\hat{x}_i(k_i^p + j|k_i^p))\hat{w}_i(k_i^p + j|k_i^p) \equiv 0$, 因此(4.31a)中就没有扰动项, 那么基于(4.33)的主要不等式改写为:

$$\bar{L}_{f_i}^{N-(k-k_i^p)+1} \|x_i(k) - \hat{x}_i(k|k_i^p)\|_{P_i} > \varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a. \quad (4.36)$$

这样的预测误差与研究 [144] 和 [106] 中的结果类似。与这些工作相比, 由于扰动补偿, 状态预测误差 $\|x_i(k) - \hat{x}_i(k|k_i^p)\|_{P_i}$ 减小了, 使得触发间隔增大。此外, 在这种情况下, 不再需要 $\bar{\eta}_i < (\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a) / \sqrt{\lambda_{\max}(P_i)}$ 的限制, 扰动变化率需要满足 $\bar{\delta}_i \leq (\varepsilon_i^f - \varepsilon_i^a) / \bar{L}_{f_i}^N$, 降低了 ET-DMPC 方案的保守性。

对于输入仿射非线性系统的情况, ET-DMPC 算法的流程总结为算法4.2。

算法 4.2 基于扰动预测的 ET-DMPC 算法（输入仿射情况）

- 1 测量当前状态 $x_i(k)$;
- 2 根据式(4.6)生成扰动序列 $\hat{w}_i(k)$;
- 3 **if** 条件 (4.34) 触发 **then**
- 4 更新触发时刻 $p \leftarrow p + 1, k_i^p = k$;
- 5 求解 (4.31) 中的 OCP 生成 $\hat{x}_i(k_i^p)$ 和 $v_i^*(k_i^p)$;
- 6 根据式(4.32)生成控制序列 $u_i(k_i^p)$;
- 7 **end**
- 8 将控制输入 $u(k|k_i^p)$ 用到系统中;
- 9 更新时刻 $k \leftarrow k + 1$, 回到第 1 步

4.5 仿真验证

本节通过将提出的两个算法应用到多个非完整机器人 [147] 的控制上来验证有效性。非完整机器人 $i, i = 1, 2, 3$ 的动力学系统可以描述为:

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= x_i(k) + T v_i(k) \cos(\theta_i(k)) + w_{i,x}(k) \\ y_i(k+1) &= y_i(k) + T v_i(k) \sin(\theta_i(k)) + w_{i,y}(k) \\ \theta_i(k+1) &= \theta_i(k) + T \omega_i(k) + w_{i,\theta}(k), \end{aligned} \quad (4.37)$$

其中, $\chi_i = [x_i, y_i, \theta_i]^T$ 为系统状态, (x_i, y_i) 表示机器人 i 的位置, θ_i 表示机器人的朝向, $u_i = [v_i, \omega_i]^T$ 为控制输入, v_i 和 ω_i 分别为线速度和角速度, w_i 是外部扰动。 $T = 0.2s$ 为采样周期。

本仿真实验的目标是将三个初始位置分别为 $\chi_{ini,1} = [-3.5, 2.5, -\pi/2]^T$, $\chi_{ini,2} = [-3.5, 2.5, -\pi/2]^T$ 和 $\chi_{ini,3} = [-3.5, 2.5, -\pi/2]^T$ 的三个机器人在满足如下控制约束的条件下, 通过协作移动到目标位置 $\chi_d = [0, 0, 0]^T$, 并尽可能降低通信消耗。

$$|v_i| < 1.5\text{m/s}, |\omega_i| < 0.65\text{rad/s} \text{ 与 } \|\chi_i\|_2^2 \leq R_{\max}^2 + \frac{\pi^2}{4},$$

其中, $R_{\max,i}$ 表示机器人 i 距离目标位置的最大距离。

为了实现目标, 我们设置预测时域为 $N = 12$, 代价函数中的权重矩阵分别为 $Q_i = 0.1I_3$, $R_i = 0.05I_2$ 和 $P_i = I_3$ 。注意到上述动力学系统在原点的线性化系统是可控的, 本节直接采用文献 [148] 中给出的局部控制器并满足假设4.2。终端约束相关的两个参数分别设置为 $\epsilon_i^f = 0.8$ 和 $\epsilon_i^a = 0.52$ 。特别地, 根据引理4.5可以得到实施算法 4.2所需的

$$G(\chi) = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

对应地, 集合 \mathcal{V}_i 满足

$$\mathcal{V}_i = \left\{ [v_i, w_i]^T \mid |v_i| \leq (\eta_i^{[1]} + \eta_i^{[2]})/T, |w_i| \leq \eta_i^{[3]}/T \right\}.$$

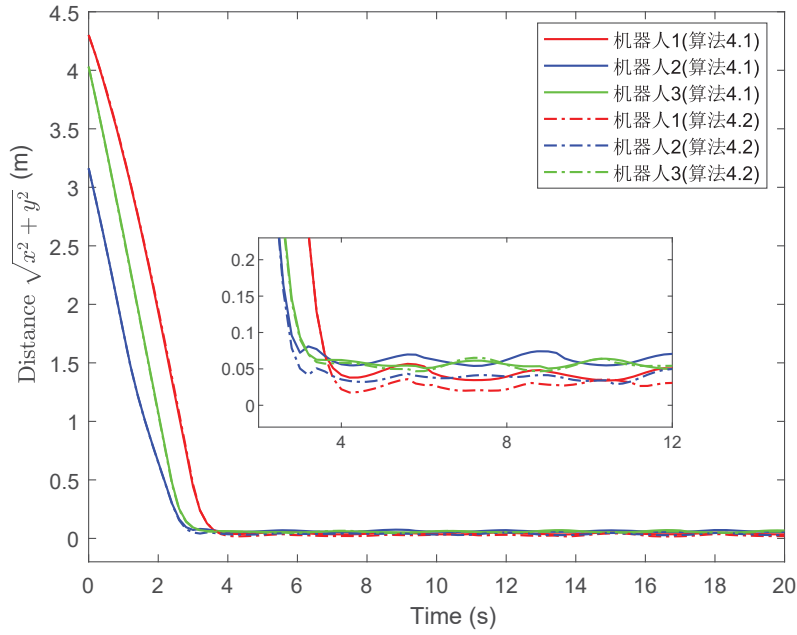


图 4.2 机器人离目标位置的距离变化曲线

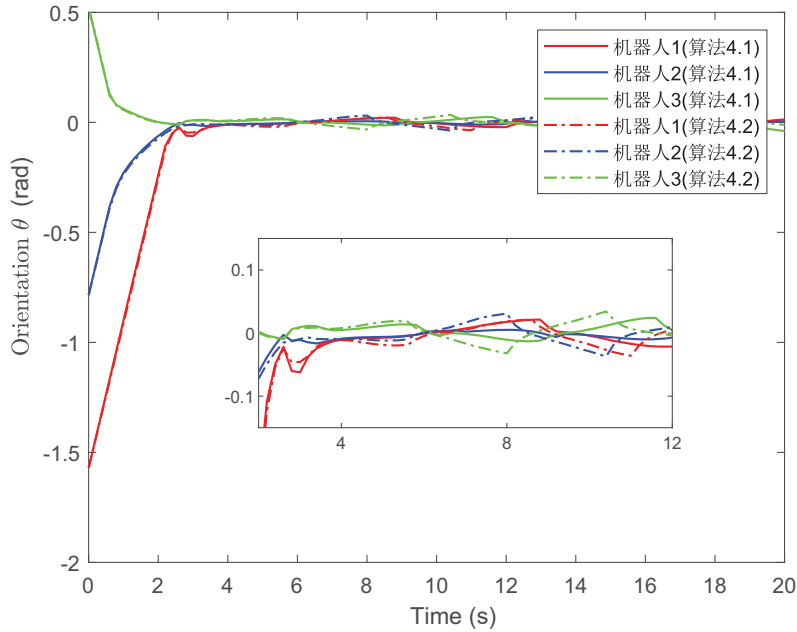


图 4.3 机器人朝向的演化曲线

本节通过对比实验展示了本文所提 ET-MPC 的优越性。具体地，我们将本章所提算法的仿真结果与传统的周期性 DMPC[59] 以及传统的 ET-DMPC[60] 进行对比。

为了同时保证四个 DMPC 的迭代可行性，设置的扰动需要满足约束(4.18)以及文献 [54] 所提出的扰动上界约束。假定扰动的表达式为

$$w_{x,1} = 0.027T \sin(2Tk + 1), \quad w_{y,1} = 0.0126T \sin(2Tk + 4.2),$$

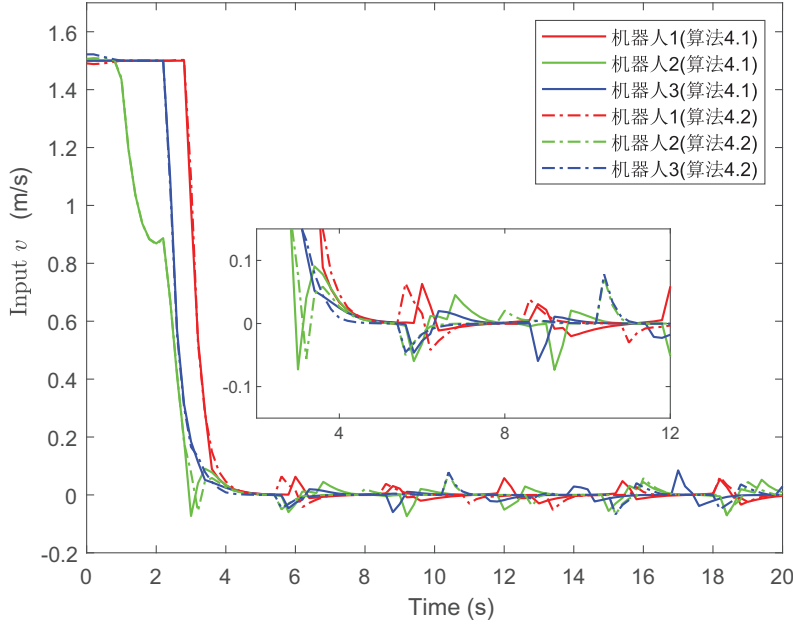


图 4.4 机器人的控制输入（线速度）

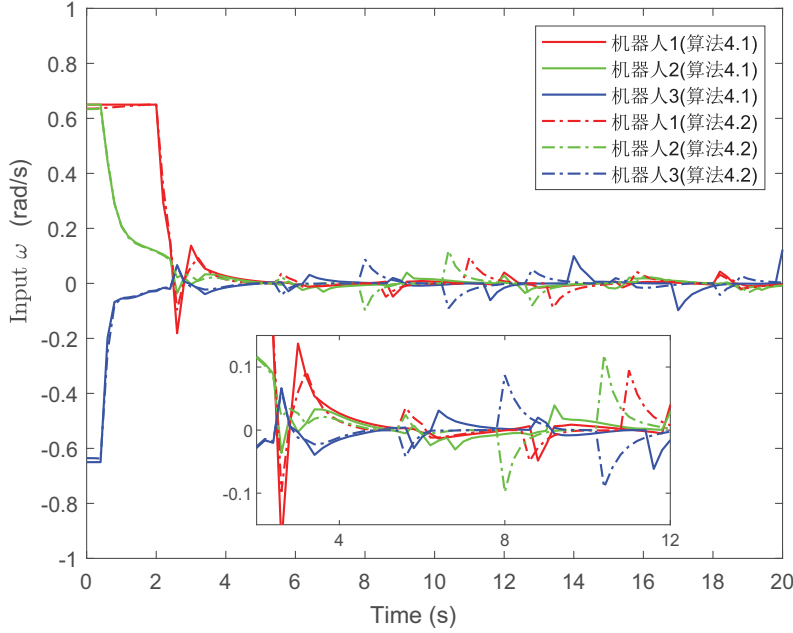


图 4.5 机器人的控制输入（角速度）

$$\begin{aligned}
 w_{\theta,1} &= 0.0198T \sin(Tk + 0.8), & w_{x,2} &= -0.027T \sin(2Tk + 7.1), \\
 w_{y,2} &= 0.0126T \sin(2Tk + 4.2), & w_{\theta,2} &= 0.0198T \sin(Tk + 1), \\
 w_{x,3} &= 0.027T \sin(2Tk + 4.2), & w_{y,3} &= -0.0126T \sin(2Tk + 1), \\
 w_{\theta,3} &= -0.0198T \sin(Tk + 7.1).
 \end{aligned}$$

通过计算可以得到扰动的上界及其变化率上界分别为 $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = [0.0054, 0.0025, 0.004]^T$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = [0.0021, 0.001, 0.0008]^T$, $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_3 =$

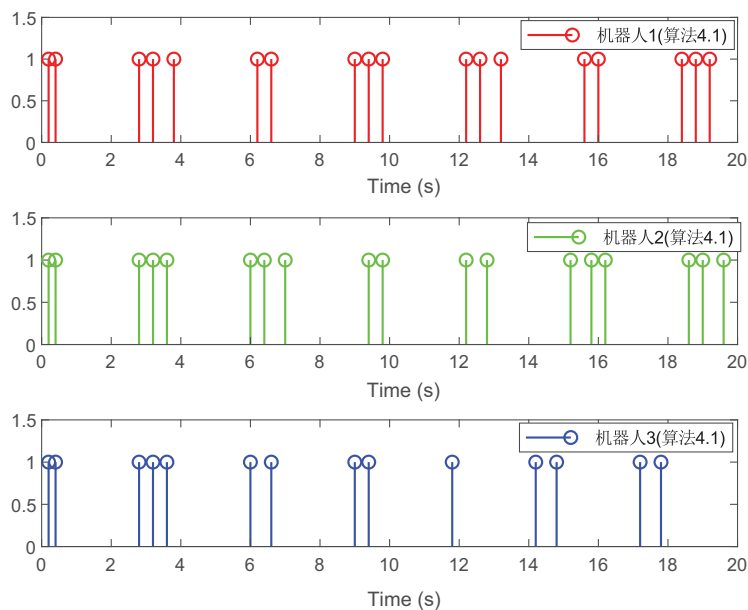


图 4.6 算法4.1下所有机器人的触发情况

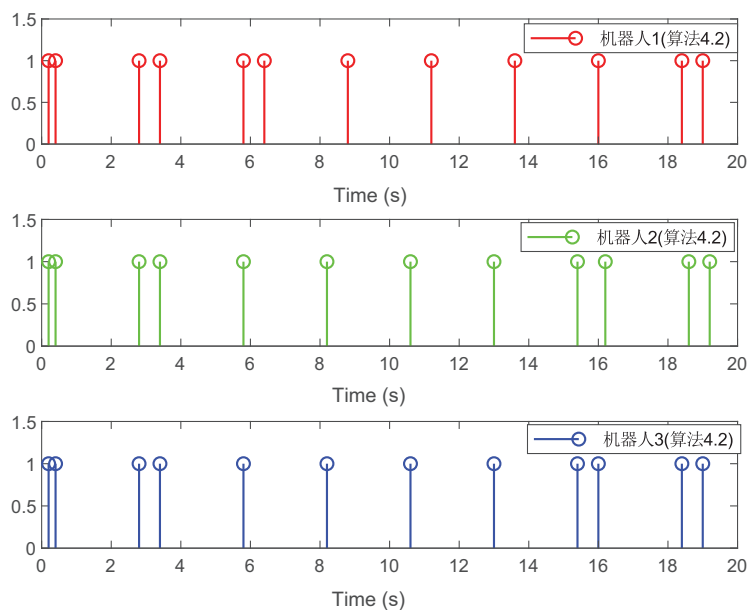


图 4.7 算法4.2下所有机器人的触发情况

0.0072, $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0.0025$ 。

仿真结果由图4.2-图4.9给出。图4.2和图4.3给出了本章提出两个算法下机器人的状态演化曲线，可以观察到均满足状态约束。相应地，图4.4和图4.5给出了机器人的控制输入，其同样满足着控制约束。因此，可以认为本章提出的两个算法均能达成预期的控制目标。

图4.6和图4.7分别给出了算法4.1和算法4.2的触发次数，而图4.8和图4.9给出的对比算法（传统的ET-DMPC和周期性DMPC）的触发次数。可以观察到，本

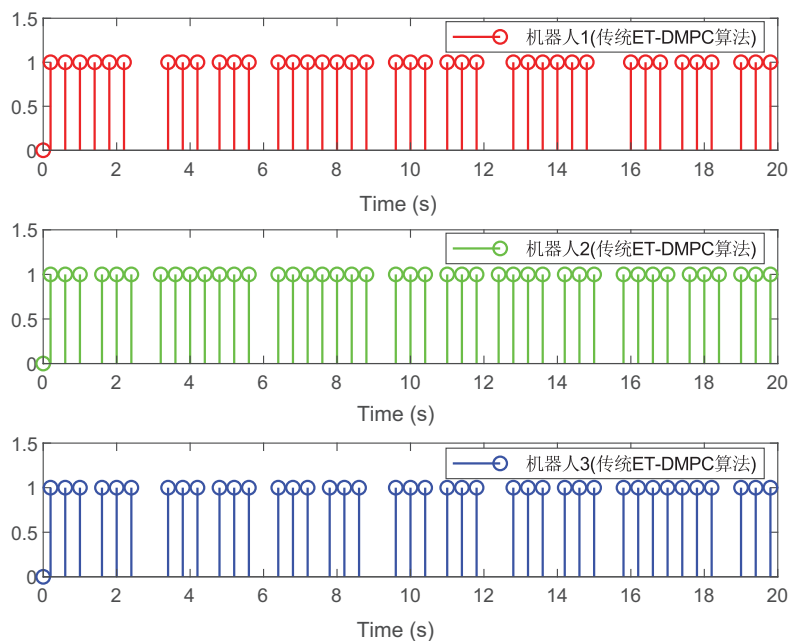


图 4.8 传统 ET-DMPC 算法下所有机器人的触发情况

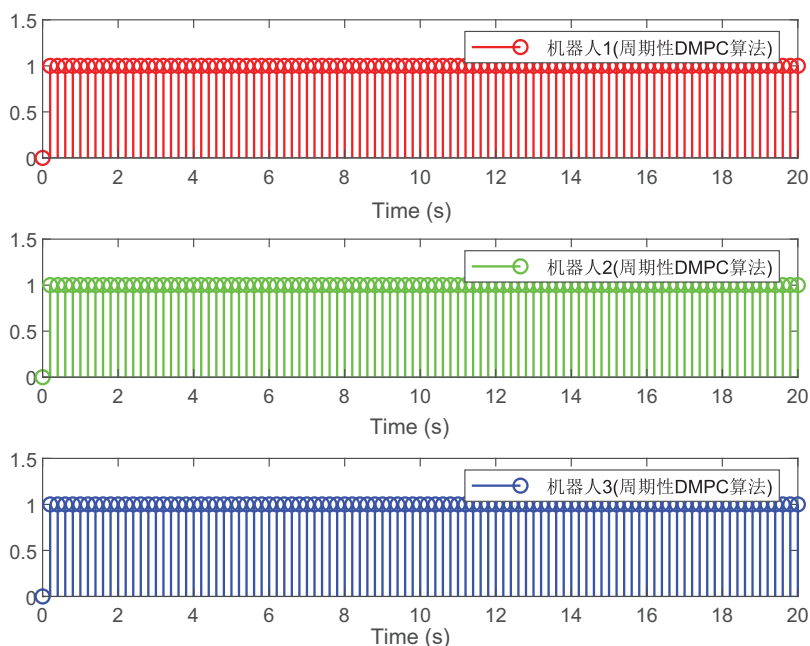


图 4.9 周期性 DMPC 算法下所有机器人的触发情况

章提出的两个算法可以在少幅牺牲控制性能的前提下显著降低触发次数。这表明本章考虑的自适应事件触发条件(4.19)或(4.34)以及将预测扰动序列考虑到(4.15)或(4.31)中 OCP 的做法能够降低设计的保守性。此外,由于算法4.2将匹配扰动进行提前补偿,触发条件(4.34)中的不确定性得到了进一步的降低,因此具有更大的触发间隔。

值得注意的是,本章提出的 ET-DMPC 算法相比于现有算法能够容忍更大的扰动上界,只要其变化率足够小。图4.10和图4.11给出了两个算法的触发时刻图,

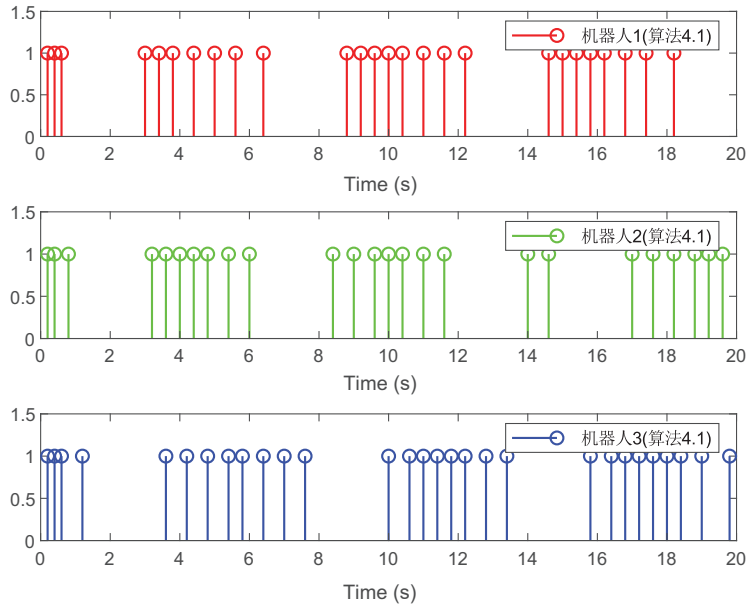


图 4.10 算法4.1下所有机器人的触发情况

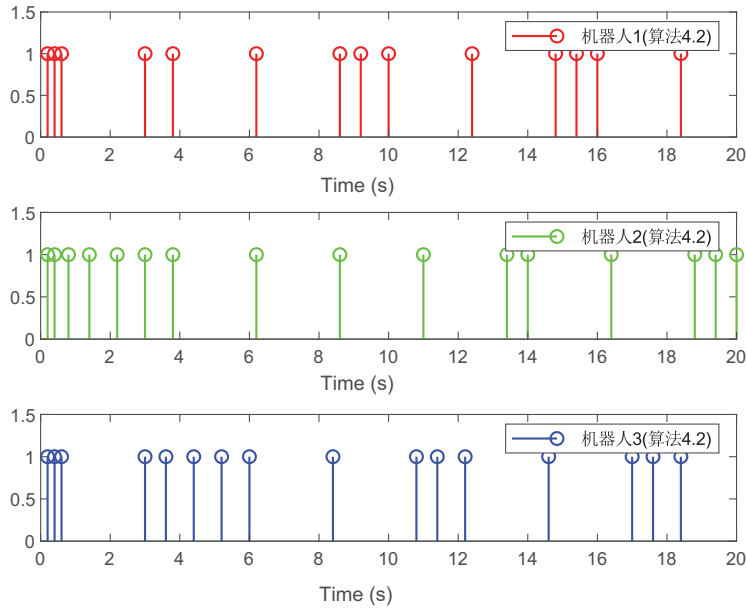


图 4.11 算法4.2下所有机器人的触发情况

其中扰动的设置为

$$\begin{aligned}
 w_{x,1} &= -0.07T \sin(0.5Tk - 2), & w_{y,1} &= -0.04T \sin(0.5Tk) \\
 w_{\theta,1} &= 0.058T \sin(0.55Tk + 2), & w_{x,2} &= -0.07T \sin(0.5Tk - 2) \\
 w_{y,2} &= 0.04T \sin(0.5Tk), & w_{\theta,2} &= -0.058T \sin(0.55Tk + 2) \\
 w_{x,3} &= 0.07T \sin(0.5Tk - 2), & w_{y,3} &= -0.04T \sin(0.5Tk) \\
 w_{\theta,1} &= -0.058T \sin(0.55Tk + 2)
 \end{aligned}$$

即 $\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_2 = \bar{\eta}_3 = 0.02$, $\bar{\delta}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\delta}_3 = 0.0022$ 。由于本章所提算法相对于传统算法能容忍更大的扰动, 所以尽管该扰动设置并不满足传统事件触发对扰动上界的要求, 但满足本章算法对扰动的要求。同时, 仿真结果也再次证明了干扰补偿技术能够有效降低触发频率。

4.6 本章小结

本章针对外部受扰非线性系统提出了基于扰动预测的 ET-DMPC 算法。为了提高模型预测精度, 提出了一种中心化路径扰动预测方法, 继而在局部优化问题中引入新的带有扰动预测的预测模型, 降低了状态预测误差, 从而降低了触发频率。为了使得状态约束依旧满足, 设计了一种新型基于扰动变化率的约束收缩集。然后将此算法拓展到输入仿射非线性系统, 对匹配和不匹配扰动进行了分离和补偿, 进一步降低了预测误差。最后通过机器人的仿真案例对比了所提算法与传统 ET-DMPC 算法, 说明了所提算法能更有效地降低计算和通信负载。

第 5 章 耦合非线性系统的滚动自触发分布式 MPC

5.1 引言

上一章提出了基于扰动预测的 ET-DMPC 策略,解决了受扰系统的 ET-DMPC 中由于预测模型不精准导致的基于可行性设计的触发条件易满足的问题。注意到上一章研究的是非耦合系统,本章针对耦合系统的 ST-DMPC 中基于可行性设计触发策略存在的问题展开研究。

在 ST-DMPC 中,在当前触发时刻,基于系统模型和当前最新的控制输入和状态信息提前计算好下一触发时刻 [125, 147]。整体的设计原则类似单个系统的 ST-MPC 设计,即基于可行性和稳定性设计触发条件。基于可行性设计的基本思想是估计出状态预测误差,进而给出状态预测误差允许的阈值来保证算法可行性 [55-56]。但是对于耦合系统,状态预测误差难以估计,原因是邻居的信息非实时可知,所以触发策略难设计。此外,为了保证系统的稳定性,局部 OCP 中通常引入额外的约束,例如兼容性约束,使得设计复杂。

综上所述,针对耦合系统如何设计一个 ST-DMPC 策略有效降低计算和通信负载的同时简化算法设计是本章所要研究的问题。为此,我们提出了一种滚动式自触发方案。在此方案中,首先设计了一种双模型局部 OCP,其中耦合的模型用来预测子系统未来的轨迹,优化了控制性能;解耦的模型用来估计状态预测误差,并基于此设计自触发条件,使得设计简化。其次是设计了一种滚动自触发机制,在两个触发时刻间加入了一些采样时刻,在采样时刻采样系统的真实状态,进而得到当前时刻的状态预测误差。基于当前时刻的状态预测误差估计此后的预测误差减小了估计保守性,从而有效地降低了触发频率。最后,局部 OCP 中加入易成立的新型稳定性约束,进而保证了系统稳定且使得稳定性分析简化。

本章安排如下,第 5.2 节描述了所要研究的问题以及一些后面设计和分析需要的准备工作。第 5.3 节给出本章所提的滚动 ST-DMPC 策略设计,包含了双模型局部 OCP 的构造以及滚动自触发机制的设计过程。第 5.4 节对所提策略进行了分析,包括 Zeno 行为的避免,算法的可行性分析以及在所提策略下系统的稳定性分析。第 5.5 节通过仿真验证了所提策略的有效性。最后总结了本章工作。

5.2 问题描述和准备工作

5.2.1 问题描述

考虑一个由 M 个互联的非线性子系统组成的大规模系统,子系统之间通过状态耦合。子系统之间的动态耦合用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示,其中 $\mathcal{V} = \{1, \dots, M\}$

是节点（子系统）的集合， $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 是边的集合。第 i 个子系统的动态方程描述如下：

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j(t)) + w_i(t), t \geq 0, \quad (5.1)$$

其中 $i \in \mathcal{V}$ ， $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ 和 $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 分别是状态和控制输入约束，其服从约束 $x_i(t) \in \mathbb{X}_i, u_i(t) \in \mathbb{U}_i$ 。集合 \mathbb{X}_i 和 \mathbb{U}_i 是紧集并且将原点包含在内。函数 g_{ij} 描述了子系统之间的相互影响。 $w_i(k) \in \mathbb{W}_i = \{w_i \in \mathbb{R}^{n_i} : \|w_i\|_{P_i} \leq \xi_i, \xi_i > 0\}$ 是外部扰动， P_i 是正定矩阵。符号 \mathcal{N}_i^u 表示子系统 i 的上游邻居，即对于一些子系统 j ， $j \in \mathcal{V} \setminus \{i\}$ 其状态分量出现在子系统 i 的动态方程中。 \mathcal{N}_i^d 表示子系统 i 的下游邻居。注意到对于任意的 $i, j \in \mathcal{V}$ ， $j \in \mathcal{N}_i^u$ 当且仅当 $i \in \mathcal{N}_j^d$ 。

整个系统的动态方程为

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) + w(t) = f(x(t), u(t)) + g(x(t)) + w(t), \quad (5.2)$$

其中 $x = [x_1^T, \dots, x_M^T]^T \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ ， $\mathbb{X} = \mathbb{X}_1 \times \dots \times \mathbb{X}_M$ ， $u = [u_1^T, \dots, u_M^T]^T \in \mathbb{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ ， $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1 \times \dots \times \mathbb{U}_M$ ， $w = [w_1^T, \dots, w_M^T]^T \in \mathbb{W} \subseteq \mathbb{R}^n$ ， $\mathbb{W} = \mathbb{W}_1 \times \dots \times \mathbb{W}_M$ 和 $n = \sum_{i \in \mathcal{V}} n_i$ ， $m = \sum_{i \in \mathcal{V}} m_i$ 。此外， $f(x, u) = [f_1(x_1, u_1)^T, \dots, f_M(x_M, u_M)^T]^T$ 和 $g(x) = [\sum_{j \in \mathcal{N}_1^u} g_{1j}(x_j)^T, \dots, \sum_{j \in \mathcal{N}_M^u} g_{Mj}(x_j)^T]^T$ 。

假设 5.1 ([93]) 函数 f_i 和 g_{ij} 是二次连续可微的，并且满足 $f_i(0, 0) = 0$ ， $g_{ij}(0) = 0$ 。此外，对于任意初始条件 $x_i(0)$ ，任意分段右连续 $x_j : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{X}_j, j \in \mathcal{N}_i^u$ ，以及任意分段右连续 $u_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{U}_i$ ，系统(5.1) 具有唯一的绝对连续解。

假设 5.2 ([131]) 函数 f_i 是 Lipschitz 连续的，即存在一个依赖于权重矩阵 P_i 的常数 L_{f_i} 使得对于任意 $(v, \zeta, u) \in \mathbb{X}_i \times \mathbb{X}_i \times \mathbb{U}_i$ ，有以下不等式成立

$$\|f_i(v, u) - f_i(\zeta, u)\|_{P_i} \leq L_{f_i} \|v - \zeta\|_{P_i}. \quad (5.3)$$

本章的主要目标是设计一种 ST-DMPC 策略使得系统(5.2)稳定。该策略应具备两方面优势：1) 所提出的策略易于设计并且可以获得好的控制性能；2) 能充分降低触发频率，从而有效节约计算和通信资源。

5.2.2 准备工作

首先，我们引入一些系统描述以便终端约束集和局部状态反馈控制律的设计。系统 (5.1) 的标称解耦动态方程表示为：

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_i(t), u_i(t)). \quad (5.4)$$

类似地，系统(5.2)的标称动态方程为：

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)). \quad (5.5)$$

考虑系统(5.1)和(5.2)的线性化。系统(5.1)在原点附近线性化表示为:

$$\dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} A_{ij}x_j(t) + w_i(t), \quad (5.6)$$

其中 $A_{ii} = \partial f_i / \partial x_i(0, 0)$, $A_{ij} = \partial g_{ij} / \partial x_j(0)$, $j \in \mathcal{N}_i^u$, $B_i = \partial f_i / \partial u_i(0, 0)$ 。

系统(5.2)在原点附近线性化表示为:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + w(t), \quad (5.7)$$

其中 $A = \partial F / \partial x(0, 0)$, $B = \partial f / \partial u(0, 0)$ 。

基于上述动态方程,给出以下两个引理。引理 5.1表明系统(5.4)存在一个正不变集。引理 5.2表明系统(5.5)存在一个正不变集。在给出引理5.1之前,首先给出一个假设。

假设 5.3 对于每个子系统 i , $i \in \mathcal{V}$, 存在一个解耦的状态反馈增益 K_i 使得 $A_{si} = A_{ii} + B_i K_i$ 和 $A_o = A + BK$ 都是赫尔维茨的, 其中 $K = \text{diag}(K_1, \dots, K_M)$ 。

引理 5.1 ([60]) 在假设 5.3成立的前提下, 给定任意的正定矩阵 Q_i, R_i , 则对于(5.4)中的标称解耦系统, 存在一个常数 $\epsilon_i > 0$, 一个矩阵 P_i 和一个状态反馈控制律 $u_i(t) = K_i x_i(t) \in \mathbb{U}_i$ 使得: 1) 集合 $\mathbb{X}_i^a = \{x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i} : V_{f_i}(x_i(t)) \leq \epsilon_i^2\}$ 是系统(5.4) ($u_i(t) = K_i x_i(t) \in \mathbb{U}_i$) 的一个正不变集; 2) 对于任意 $x_i(t) \in \mathbb{X}_i^a$, 有 $\dot{V}_{f_i}(x_i(t))|_{\dot{x}_i(t)=f_i(x_i(t), K_i x_i(t))} \leq -\|x_i(t)\|_{\bar{Q}_i}^2$, 其中 $V_{f_i}(x_i(t)) = \|x_i(t)\|_{P_i}^2$, $\bar{Q}_i = Q_i + K_i^T R_i K_i$, P_i 是 Lyapunov 方程 $P_i A_{si} + A_{si}^T P_i = -\bar{Q}_i$ 的解。

令 $Q = \text{diag}\{Q_1, \dots, Q_M\}$, $P = \text{diag}\{P_1, \dots, P_M\}$, $\bar{Q} = \text{diag}\{\bar{Q}_1, \dots, \bar{Q}_M\}$, $A_s = \text{diag}\{A_{s1}, \dots, A_{sM}\}$, 其中 Q_i, P_i, \bar{Q}_i 和 A_{si} 是在引理5.1和假设 5.3中定义的。

假设 5.4 ([93]) 耦合度满足 $A_o^T P + P A_o - (A_s^T P + P A_s) \leq 1/2 \bar{Q}$ 。

基于假设5.4, 引理 5.2给出了标称系统(5.5)的正不变集 \mathbb{X}^a 。

引理 5.2 如果假设5.1, 5.3和 5.4满足, 对于标称系统(5.5), 存在一个常数 $\epsilon > 0$ 和一个状态反馈控制律 $u(x) = Kx(t) \in \mathbb{U}$ 使得 $\mathbb{X}^a = \{x(t) \in \mathbb{R}^n : V_f(x(t)) \leq \epsilon^2\}$ 是系统 $\dot{x}(t) = F(x(t), Kx(t))$ 的正不变集。

证明 证明思路类似于文献 [93, 131], 这里给出一个简短的证明。根据假设5.4, $V_f(x(t))$ 的导数计算如下:

$$\begin{aligned} & \dot{V}_f(x(t))|_{\dot{x}(t)=F(x(t), Kx(t))} \\ &= x(t)^T (A_o^T P + P A_o)x(t) + 2x(t)^T P \psi(x(t)) \\ &\leq -\|x(t)\|_{\bar{Q}}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2\|\psi(x(t))\|_P}{\lambda_{\min}(P^{-1/2} \bar{Q} P^{-1/2}) \|x(t)\|_P} \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中 $\psi(x(t)) = F(x(t), Kx(t)) - A_o x(t)$ 。由于当 $\|x(t)\|_P \rightarrow 0$ 时 $\frac{\|\psi(x(t))\|_P}{\|x(t)\|_P} \rightarrow 0$, 则存在常数 ϵ 和 $0 < \beta < 1/2$ 使得不等式 $\frac{\|\psi(x(t))\|_P}{\|x(t)\|_P} \leq (1 - 2\beta) \lambda_{\min}(P^{-1/2} \bar{Q} P^{-1/2})/4$ 成立, 进而可以得到对于任意 $x(t) \in \mathbb{X}^a$ 有 $\dot{V}_f(x(t)) \leq -\beta \|x(t)\|_{\bar{Q}}^2$ 。证毕。 ■

5.3 滚动自触发分布式模型预测控制策略设计

5.3.1 双模型最优控制问题

在自触发策略下, 子系统之间的信息采样和控制更新是异步进行的。对于每个子系统 i , 用 t_i^r , $r \in \mathbb{N}$ 表示其第 r 个触发时刻。为了准确预测子系统 i 的状态演化, 最理想的方法是利用其上游邻居 $j \in \mathcal{N}_i^u$ 的实际状态信息。然而, 由于子系统之间采用异步触发的方式, 子系统 i 无法获得其上游邻居的真实状态信息。因此, 在每个触发时刻 t_i^r , 每个子系统 i 根据从其邻居接收到的最新信息构造邻居的假设状态信息, 记为 $x_j^a, j \in \mathcal{N}_i^u$ 。类似地, 子系统 i 向其下游邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i^d$ 传输其最新的信息用于构造 x_i^a 。

为了便于定义 OCP, 以下总结了不同符号的状态和控制输入含义。为了便于表达, 设 $\cdot(t; t_i^r)$ 是 t , $t \in [t_i^r, t_i^r + T]$ 时刻的一个变量, 则有以下不同表述:

- $\tilde{u}_i(t; t_i^r)$ 和 $\tilde{x}_i(t; t_i^r)$ 分别是子系统 i 的预测控制输入和预测状态轨迹;
- $\tilde{u}_i^*(t; t_i^r)$ 和 $\tilde{x}_i^*(t; t_i^r)$ 分别是求解 OCP 得到的子系统 i 的最优控制输入和与之对应的最优状态轨迹;
- $\bar{u}_i(t; t_i^r)$ 是候选的可行控制轨迹, 其构造将在下面部分给出, $\bar{x}_i(t; t_i^r)$ 是与之对应的可行状态;
- $\hat{x}_i(t; t_i^r)$ 是标称状态;
- $x_i^a(t; t_i^r)$ 是子系统 i 的假设状态, 其构造方式将在以下部分给出。

每个子系统的双模型局部 OCP 定义如下:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^*(t; t_i^r) &= \arg \min \tilde{J}_i(\tilde{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r)) \\ \text{s.t. } \dot{\tilde{x}}_i(t; t_i^r) &= f_i(\tilde{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j^a(t; t_i^r)) \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\dot{\hat{x}}_i(t; t_i^r) = f_i(\hat{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r)) \quad (5.9b)$$

$$\hat{x}_i(t_i^r; t_i^r) = \tilde{x}_i(t_i^r; t_i^r) = x(t_i^r) \quad (5.9c)$$

$$\hat{x}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(t - t_i^r) \quad (5.9d)$$

$$\hat{x}_i(t_i^r + T; t_i^r) \in \mathbb{X}_i^f \quad (5.9e)$$

$$\tilde{u}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{U}_i \quad (5.9f)$$

$$\hat{J}_i(\hat{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r)) \leq \hat{J}_i(\bar{x}_i(t; t_i^r), \bar{u}_i(t; t_i^r)), \quad (5.9g)$$

其中 $t \in [t_i^r, t_i^r + T]$, T 是预测时域。收缩集是 $\mathbb{B}_i(t - t_i^r)$, 其设计是为了使得真实状态约束能满足。 $\mathbb{X}_i^f = \{x \in \mathbb{R}^{n_i} : \|x\|_{P_i} \leq \alpha_i \varepsilon_i\}$ 表示终端集, 其中 $\varepsilon_i = \min\{\varepsilon_i, \varepsilon/\sqrt{M}\}$ 。

采用(5.9a)中的耦合动态方程的目的是保证一个较好的控制性能。(5.9b)中标称动态的使用是为了保证迭代可行性。(5.9a)和(5.9b)的初始状态如等式(5.9c)所

示。(5.9d)中的收缩约束设计是为了保证真实状态约束得以满足。(5.9e)是终端状态约束。最后一个约束(5.9g)的提出是为了保证每个系统的稳定性。

- 假设状态 $x_j^a(t; t_i^r), t \in [t_i^r, t_i^r + T], j \in \mathcal{N}_i^u$ 构造如下:

$$x_j^a(t; t_i^r) = \begin{cases} \tilde{x}_j^*(t; \eta_j(t_i^r)), & t \in [t_i^r, \eta_j(t_i^r) + T] \\ A_{s_j} x_j^a(t; t_i^r), & t \in [\eta_j(t_i^r) + T, t_i^r + T], \end{cases} \quad (5.10)$$

其中 $\eta_j(t_i^r) \triangleq \max\{l \in \mathbb{N} : t_i^l \leq t_i^r\}$ 。

- 收缩集 $\mathbb{B}_i(t - t_i^r)$ 定义如下:

$$\mathbb{B}_i(t - t_i^r) := \{x \in \mathbb{R}^{n_i} : \|x\|_{P_i} \leq \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t-t_i^r)} - 1)\}, \quad (5.11)$$

其中 $\theta_{ij} = \sup_{x_j \in \mathbb{X}_j} \|g_{ij}(x_j)\|_{P_i}$ 。

- 代价函数 $\tilde{J}_i(\tilde{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r))$ 以二次函数的形式给出:

$$\tilde{J}_i(\tilde{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r)) = \int_{t_i^r}^{t_i^r+T} (\|\tilde{x}_i(s; t_i^r)\|_{\tilde{Q}_i}^2 + \|\tilde{u}_i(s; t_i^r)\|_{\tilde{R}_i}^2) ds + \|\tilde{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{\tilde{P}_i}^2, \quad (5.12)$$

其中 \tilde{Q}_i, \tilde{R}_i 和 \tilde{P}_i 都是正定矩阵。

- 函数 $\hat{J}_i(\hat{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r))$ 定义如下:

$$\hat{J}_i(\hat{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i(t; t_i^r)) = \int_{t_i^r}^{t_i^r+T} (\|\hat{x}_i(s; t_i^r)\|_{Q_i}^2 + \|\tilde{u}_i(s; t_i^r)\|_{R_i}^2) ds + \|\hat{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{P_i}^2, \quad (5.13)$$

其中 Q_i, R_i, P_i 都是正定矩阵。此外, P_i 是 Lyapunov 方程 $A_{si}^T P_i + P_i A_{si} = -\tilde{Q}_i$ 的解。

- 候选的可行控制输入 $\bar{u}_i(t; t_i^r), r > 0$ 构造如下:

$$\bar{u}_i(t; t_i^r) = \begin{cases} \bar{u}^*(t; t_i^{r-1}), & t \in [t_i^r, t_i^{r-1} + T], \\ K_i \tilde{x}(t; t_i^r), & t \in [t_i^{r-1} + T, t_i^r + T], \end{cases} \quad (5.14)$$

其中可行状态轨迹由(5.4)中的标称动态方程生成,初始值为 $\bar{x}_i(t; t_i^r) = x_i(t_i^r)$ 。

注 (5.9)中设计的双模型 OCP 与传统 OCP 主要有以下三个区别:

- 1) 与传统 OCP[69, 90-91, 149] 中仅使用了标称动态方程(5.9b)相比, 本章提出的 OCP 使用了双模型(5.9a) 和 (5.9b)。这样的双模型 OCP 策略使得性能保证和约束满足能够分开设计, 也就是通过寻找最优控制输入使得受耦合动态方程(5.9a)影响的代价函数 \tilde{J}_i 最小, 并在相同的控制输入下检查受标称系统(5.9b)影响的约束是否满足。注意由于耦合动态考虑了子系统之间的相互影响, 耦合动态(5.9a) 比传统 OCP[69, 90-91, 149] 仅使用标称系统预测更为精确。因此, 双模型策略有利于控制性能的提升。

- 2) 与之前关于耦合系统的研究相比, 例如 [93, 131, 150], (5.9)中的 OCP 避免了一些含有严格参数设计的约束。注意到所设计的 OCP 引入了一个稳定性约束, 其可以自然满足, 无需额外的条件, 将在5.4.2部分详细解释。从而, 相比于传统耦合系统的研究, 所提的 OCP 设计更为简单。
- 3) 为了降低稳定性分析的保守性, 在 OCP 中引入了约束(5.9g)。事实上, 在许多研究中 [93, 132], 最优代价函数 \tilde{J}_i 一般作为 Lyapunov 函数。然而, 由于预测模型中存在耦合影响, 基于最优值代价 \tilde{J}_i 得到的稳定性条件会比较保守。因此, 我们构造了另一个代价函数 \hat{J}_i 作为候选的 Lyapunov 函数, 并引入(5.9g)中的约束来保证稳定性。

注 根据实际不同的控制目标, 如驾驶舒适性和能源效率, 选择将要最小化的成本函数 \tilde{J}_i , 其选择依据引理 5.1。

5.3.2 滚动自触发机制

子系统 i 的真实状态轨迹(5.1)和标称状态(5.4)均由使用控制输入 $\tilde{u}_i^*(t; t_i^r)$ 生成。然而, 标称系统(5.4)忽略了耦合影响和外部扰动, 从而导致真实状态 $x(t)$ 和标称状态 $\hat{x}_i(t; t_i^r)$ 之间存在状态误差。下面的引理 5.3给出了状态误差描述, 为了自触发机制设计而做准备。

引理 5.3 对于每个子系统 i , 如果(5.1)中真实系统状态和(5.4)中标称系统状态都是利用控制输入 $\tilde{u}_i^*(t; t_i^r)$ 生成, 那么状态误差 $\|x_i(t) - \hat{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i}$ 满足

$$\|x_i(t) - \hat{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i} \leq \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t-t_i^r)} - 1), \quad (5.15)$$

其中 $t \in [t_i^r, t_i^r + T]$ 。

证明 通过 Gronwall-Bellman 不等式可以很容易得到此引理, 因此省略证明过程。 ■

考虑到 OCP 的迭代可行性, 标称系统状态轨迹不能偏离真实状态轨迹太远。为此, 传统的自触发机制, 例如 [55, 125, 147], 利用估计的状态预测误差和设计的触发阈值构成如下的可行性触发条件

$$\begin{aligned} \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t-t_i^r)} - 1) &= (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) e^{L_{f_i}(t-t_i^r-T)} \\ &=: \varphi(t), \end{aligned} \quad (5.16)$$

其中 $\varphi(t)$ 是一个时变的阈值, 其设计是为了保证迭代可行性。 $\varphi(t)$ 的具体设计方法将在5.4.2部分展开。

求解(5.16)可以得到触发时刻如下

$$t_i^{r+1} := \inf\{t : t > t_i^r, (5.16)\}. \quad (5.17)$$

由于得不到精确的耦合项和扰动值，所以使用耦合项和扰动的上界会得到一个保守的误差上界，进而由触发条件(5.17)决定的触发比较频繁。

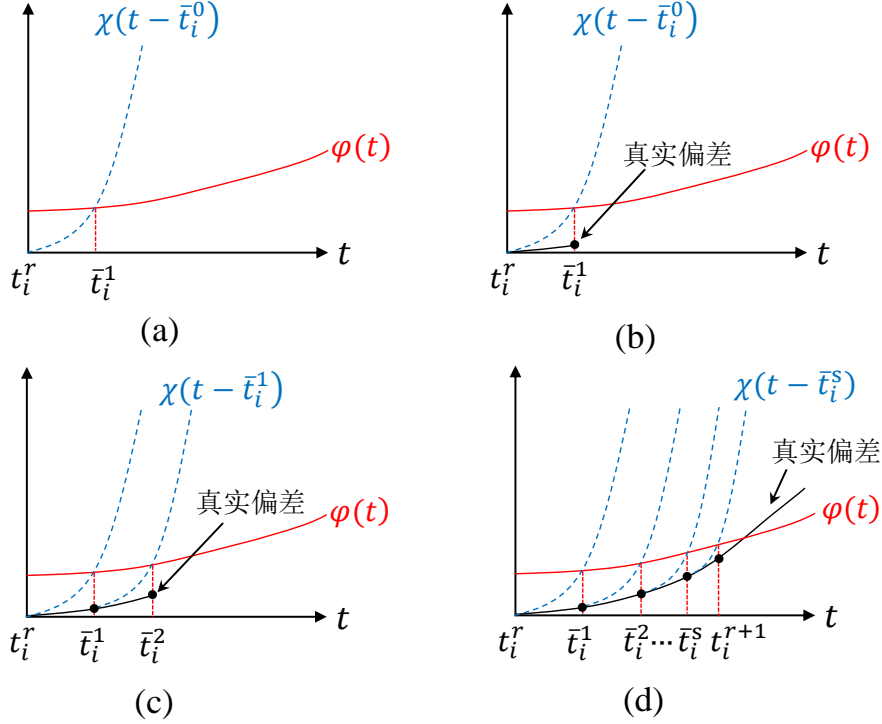


图 5.1 滚动自触发机制

(a) 在每个触发时刻 t_i^r ，由式(5.20)确定第 1 个采样时刻 \bar{t}_i^1 。(b) 在采样时刻 \bar{t}_i^1 ，测量当前状态 $x_i(\bar{t}_i^1)$ ，计算得到 $\|x_i(\bar{t}_i^1) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^1; t_i^r)\|_{P_i}$ 的准确值。(c) 由式 (5.18) 计算得到 $\chi(t - \bar{t}_i^1)$ 的值，由式(5.20)确定下一个采样时刻 \bar{t}_i^2 。(d) 过程 (b) 和 (c) 重复执行直到终止条件(5.21)满足，并由式(5.22)确定下一触发时刻 t_i^{r+1} 。

为了解决此问题，我们增加一些状态采样时刻以获取保守性低的误差估计。首先在触发时刻 t_i^r 之后定义了第 s ， $s \in \mathbb{Z}$ 个采样时刻为 \bar{t}_i^s ， $\bar{t}_i^s \geq t_i^r$ 且 $\bar{t}_i^0 = t_i^r$ 。在每个采样时刻 \bar{t}_i^s ，测量当前状态 $x_i(\bar{t}_i^s)$ 计算得到状态偏差 $\|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i}$ 。基于此偏差值，可以得到更为准确的 $\|x_i(t) - \hat{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i}$ ， $t > \bar{t}_i^s$ 的估计值。最后基于此估计值，用传统的自触发机制确定下个采样时刻 \bar{t}_i^{s+1} 。整个过程如图 5.1 所示。

接下来的三个部分详细地阐述所提出的自触发机制。首先，引理5.4描述了基于精确值 $\|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i}$ 来估计 $\|x_i(t) - \hat{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i}$ ， $t > \bar{t}_i^s$ 的值。

引理 5.4 对于子系统 i ，状态 $x(t)$ 和 $\hat{x}_i(t; t_i^r)$ 之间的偏差的上界为：

$$\begin{aligned} \|x_i(t) - \hat{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i} &\leq \|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i} e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^s)} + \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^s)} - 1) \\ &:= \chi(t - \bar{t}_i^s), \end{aligned} \quad (5.18)$$

其中 $t \in [t_i^r, t_i^r + T]$ ， $\bar{t}_i^s \in [t_i^r, t]$ 。 $\chi(t - \bar{t}_i^s)$ 表示真实状态预测误差的估计。

证明 由真实系统方程(5.1)和标称系统方程(5.4), 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 & \|x_i(t) - \hat{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i} \\
 = & \|x_i(\bar{t}_i^s) + \int_{\bar{t}_i^s}^t (f_i(x_i(s), \tilde{u}_i^*(s; t_i^r)) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^u} g_{ij}(x_j(s)) \\
 & + w_i(s)) ds - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r) - \int_{\bar{t}_i^s}^t (f_i(\hat{x}_i(s; t_i^r), \tilde{u}_i^*(s; t_i^r)) ds\|_{P_i} \\
 \leq & \|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i} + (\theta_{ij} + \xi_i)(t - \bar{t}_i^s) + \int_{\bar{t}_i^s}^t L_{f_i} \|x_i(s) - \hat{x}_i(s; t_i^r)\| ds \\
 \leq & \|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i} e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^s)} + \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^s)} - 1),
 \end{aligned}$$

其中最后一个不等式利用了 Gronwall-Bellman 不等式。 ■

第二是通过传统的自触发机制确定采样时刻 \bar{t}_i^s 。具体地, 更新条件设计如下:

$$\begin{aligned}
 & \|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i} e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^s)} + \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^s)} - 1) \\
 = & (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) e^{L_{f_i}(t - t_i^r - T)}, \bar{t}_i^0 = t_i^r.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

基于采样时刻更新条件(5.19), 采样时刻 $\bar{t}_i^{s+1}, s \in \mathbb{Z}$ 确定方式为

$$\bar{t}_i^{s+1} := \inf\{t : t > \bar{t}_i^s, (5.19)\}. \tag{5.20}$$

第三是建立采样的终止条件, 同时确定下一触发时刻 t_i^{r+1} 。设计的主要思想是如果两个采样时刻 \bar{t}_i^s 和 \bar{t}_i^{s+1} 足够近, 那么状态预测误差 $\|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^r)\|_{P_i}$ 可能足够接近式(5.16)中的触发阈值 $\varphi(t)$, 此时将触发时刻设置为 $t_i^{r+1} = \bar{t}_i^s$ 。此外, 考虑到预测时域需要满足约束 $t_i^{r+1} \leq t_i^r + T$ 。综上所述, 终止条件设置为

$$\bar{t}_i^{s+1} - \bar{t}_i^s < \delta_i \quad \text{或} \quad \bar{t}_i^{s+1} - t_i^r \geq T, \tag{5.21}$$

同时, 下一个触发时刻通过下式确定

$$t_i^{r+1} = \begin{cases} \bar{t}_i^s, & \text{if } \bar{t}_i^{s+1} - \bar{t}_i^s < \delta_i, \\ t_i^r + T, & \text{if } \bar{t}_i^{s+1} - t_i^r \geq T, \end{cases} \tag{5.22}$$

其中 δ_i 是每个子系统 i 的最小采样间隔。

从触发时刻 t_i^r 开始, 以初始采样条件 $\bar{t}_i^0 = t_i^r$ 一直采样直到(5.21)中终止条件满足, 在下一采样时刻 t_i^{r+1} 执行同样的过程。我们称这种基于传统自触发机制以滚动的方式确定采样时刻的机制为“滚动自触发机制”。显然, 传统的自触发机制是本章所提滚动自触发机制的一种特殊情况。因此, 相比之下, 本章所提机制能更有效地降低触发频率。

总结上述设计过程得到最终的算法5.1。

算法 5.1 滚动 ST-DMPC 算法

- 1 在 $t = 0$ 时刻, 设置 $r = 0, s = 0, \bar{t}_i^s = 0, x_j^a(t; t_i^r) = 0, \text{flag} = 1$, 求解(5.9)中的 OCP, 同时根据式(5.20)确定下一个采样时刻 \bar{t}_i^{s+1} , 回到第 5 步;
- 2 在任意的 $t > 0$ 时刻, 如果 $x(t) \in \mathbb{X}^a$, 使用控制输入 $Kx(t)$, 到第 2 步。否则, 到第 3 步;
- 3 如果 $t = t_i^r$, 设置 $\text{flag} = 1$, 根据(5.10)构造假设状态 $x_j^a(t; t_i^r), j \in \mathcal{N}_i^u$; 求解(5.9)中的 OCP 并传输 $\bar{x}_i^*(t; t_i^r), t \in [t_i^r, t_i^r + T]$ 给其下游邻居 $j, j \in \mathcal{N}_i^d$; 设置初始采样时刻为 $\bar{t}_i^0 = t, s = 0$; 根据式(5.20)确定下一个采样时刻 \bar{t}_i^{s+1} , 到第 5 步。否则, 到第 4 步;
- 4 如果 $t = \bar{t}_i^s$, 根据式(5.20)确定下一个采样时刻 \bar{t}_i^{s+1} 。否则, 回到第 6 步;
- 5 检查(5.21)中的终止条件。如果条件满足, 则根据(5.22)确定下一触发时刻 t_i^{r+1} , 并设置 $r = r + 1, \text{flag} = 0$ 。否则, 设置 $s = s + 1$;
- 6 如果 $\text{flag} = 1$, 应用控制输入 $\bar{u}_i^*(t; t_i^r)$, 到第 2 步。否则, 应用 $\bar{u}_i^*(t; t_i^{r-1})$, 到第 2 步。

5.4 策略分析

本节通过三个定理给出本章的理论结果。首先, 定理5.5说明了所设计的算法5.1避免了 Zeno 行为。其次, 定理 5.6分析了算法的迭代可行性。最后, 定理5.7分析了系统稳定性。

5.4.1 Zeno 行为的避免

定理5.5指出触发间隔始终存在一个最小的下界, 这意味着所设计的算法是没有 Zeno 行为的。

定理 5.5 对系统(5.1)执行算法5.1。如果以下条件满足

$$\frac{1}{L_{f_i}} \ln \frac{(1 - \alpha_i)\varepsilon_i L_{f_i}}{\xi_i + \theta_{ij}} < T \quad (5.23)$$

则存在一个最小的触发间隔 Δ_i , 即 $\Delta_i \leq \inf_{r \in \mathbb{N}} \{t_i^{r+1} - t_i^r\}$ 且

$$\Delta_i = \frac{1}{L_{f_i}} \ln \frac{e^{L_{f_i} T}}{e^{L_{f_i} T} - \frac{(1 - \alpha_i)\varepsilon_i L_{f_i}}{\xi_i + \theta_{ij}}}. \quad (5.24)$$

证明 从触发时刻的决定式(5.22)可知, 下一触发时刻 t_i^{r+1} 和当前第一个采样时刻 \bar{t}_i^1 一定满足 $t_i^{r+1} \geq \bar{t}_i^1$ 。式(5.19)中代入 $\bar{t}_i^s = \bar{t}_i^0$ 得到

$$\frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t - \bar{t}_i^0)} - 1) = (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) e^{L_{f_i}(t - t_i^r - T)}.$$

考虑到采样时刻的初始条件 $\bar{t}_i^0 = t_i^r$, 求解上式可以得到 \bar{t}_i^1 , 从而进一步可以得到 $t_i^{r+1} - t_i^r \geq \bar{t}_i^1 - t_i^r = \Delta_i$ 。证毕。 ■

5.4.2 迭代可行性分析

迭代可行性说明了每个子系统 i 的局部 OCP 只要在初始时刻 $t_i^0 = 0$ 是有解的, 那么在以后的每个触发时刻都存在解。首先给出 OCP 初始可行的假设。

假设 5.5 ([73]) 每个子系统 i , $i \in \mathcal{V}$ 的局部 OCP 在初始时刻都是有解的, 并且 $\mathbb{X}_i^a \subset \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(T)$ 。

定理 5.6 对于每个子系统(5.1), 在假设5.1-5.5成立的前提下, 如果预测时域选定为

$$T \leq \frac{1}{L_{f_i}} \ln \frac{(1 - \alpha_i) \varepsilon_i L_{f_i}}{(\xi_i + \theta_{ij})(1 - \alpha_i)^{\frac{4 \lambda_{\max}(P_i)}{\lambda_{\min}(Q_i)} L_{f_i}}}, \quad (5.25)$$

则(5.9)中的 OCP 是迭代可行的。

证明 该定理采用数学归纳法证明。首先, 由假设5.5可知, OCP 在初始时刻 $t_i^0 = 0$ 是可行的。其次, 假设 OCP 在 t_i^{r-1} , ($r > 1, i \in \mathcal{V}$) 时刻是可行的。则需要证明在 t_i^r 时刻, OCP 依旧是可行的。为了证明此结论, 我们需要证明式(5.14)中构造的候选控制输入 $\bar{u}_i(t; t_i^r)$ 和与之对应的状态 $\bar{x}_i(t; t_i^r)$ 满足式(5.9d)-(5.9g)中的约束。

1.(5.9d)中的约束满足, 即 $\bar{x}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(t - t_i^r)$, $t \in [t_i^r, t_i^r + T]$ 。

当 $t \in [t_i^{r-1}, t_i^{r-1} + T]$, 基于构造的控制输入 $\bar{u}_i(t; t_i^r)$, 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \|\bar{x}_i(t; t_i^r) - \hat{x}_i(t; t_i^{r-1})\|_{P_i} \\ &= \|\bar{x}_i(t_i^r; t_i^r) + \int_{t_i^r}^t (f_i(\bar{x}_i(s; t_i^r), \bar{u}_i^*(s; t_i^r))) ds \\ & \quad - \hat{x}_i(t_i^r; t_i^{r-1}) - \int_{t_i^r}^t (f_i(\hat{x}_i(s; t_i^{r-1}), \bar{u}_i^*(s; t_i^{r-1}))) ds\|_{P_i} \\ & \leq \|x_i(t_i^r) - \hat{x}_i(t_i^r; t_i^{r-1})\|_{P_i} + \int_{t_i^r}^t L_{f_i} \|\bar{x}_i(s; t_i^r) - \hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{P_i} ds. \end{aligned}$$

使用 Gronwall-Bellman 不等式可以进一步得到

$$\|\bar{x}_i(t; t_i^r) - \hat{x}_i(t; t_i^{r-1})\|_{P_i} \leq \|x_i(t_i^r) - \hat{x}_i(t_i^r; t_i^{r-1})\|_{P_i} e^{L_{f_i}(t - t_i^r)}. \quad (5.26)$$

由引理5.4中条件(5.15)可得

$$\|x_i(t_i^r) - \hat{x}_i(t_i^r; t_i^{r-1})\|_{P_i} \leq \chi(t_i^r - t_i^{r-1}) = \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t_i^r - t_i^{r-1})} - 1). \quad (5.27)$$

将(5.27)代入(5.26)可得

$$\|\bar{x}_i(t; t_i^r) - \hat{x}_i(t; t_i^{r-1})\|_{P_i} \leq \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t - t_i^{r-1})} - e^{L_{f_i}(t - t_i^r)}).$$

由于 $\hat{x}_i(t; t_i^{r-1}) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(t - t_i^{r-1})$, 利用三角不等式可以进一步得到 $\bar{x}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(t - t_i^{r-1}) \oplus \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t - t_i^{r-1})} - e^{L_{f_i}(t - t_i^r)}) \subset \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(t - t_i^r)$ 。

当 $t \in [t_i^{r-1} + T, t_i^r + T]$ 时, 我们需要证明 $\bar{x}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{X}_i^a$, 进而由假设 5.5 可得 $\bar{x}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{X}_i \ominus \mathbb{B}_i(t - t_i^r)$ 。根据式(5.15), (5.19)和(5.22)可以得到

$$\begin{aligned} \|x_i(t_i^r) - \hat{x}_i(t_i^r; t_i^{r-1})\|_{P_i} &\leq \|x_i(\bar{t}_i^s) - \hat{x}_i(\bar{t}_i^s; t_i^{r-1})\|_{P_i} e^{L_{f_i}(t_i^r - \bar{t}_i^s)} + \frac{\xi_i + \theta_{ij}}{L_{f_i}} (e^{L_{f_i}(t_i^r - \bar{t}_i^s)} - 1) \\ &= (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) e^{L_{f_i}(t_i^r - t_i^{r-1} - T)}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

其中 \bar{t}_i^s 是离触发时刻 t_i^r 最近的采样时刻。

将式 (5.28) 代入式(5.26)可以进一步得到

$$\|\bar{x}_i(t; t_i^r) - \hat{x}_i(t; t_i^{r-1})\|_{P_i} \leq (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) e^{L_{f_i}(t - t_i^{r-1} - T)}. \quad (5.29)$$

因此, 令式(5.29)中 $t = t_i^{r-1} + T$ 可以得到 $\|\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r) - \hat{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^{r-1})\|_{P_i} \leq (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i)$ 。使用三角不等式得到 $\|\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r)\|_{P_i} \leq \varepsilon_i$, 也就是 $\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r) \in \mathbb{X}_i^a$, 从而可以使用状态反馈控制输入 $K_i x_i$ 。根据引理 5.1 的结果, 状态 $\bar{x}_i(t; t_i^r), t \in [t_i^{r-1} + T, t_i^r + T]$ 将始终保持在集合 \mathbb{X}_i^a 中。

2.(5.9e)中的终端约束满足, 即 $\bar{x}_i(t_i^r + T; t_i^r) \in \mathbb{X}_i^f$ 。

因为 $\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r) \in \mathbb{X}_i^a$, 那么根据引理 5.1 可以得到 $\dot{V}_{f_i}(\|\bar{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i}) \leq -\|\bar{x}_i(t; t_i^r)\|_{Q_i}^2, t \in [t_i^{r-1} + T, t_i^r + T]$ 。使用比较引理, 可以进一步得到

$$\|\bar{x}_i(t; t_i^r)\|_{P_i}^2 \leq \|\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 e^{-\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_i)}{2\lambda_{\max}(P_i)}(t - t_i^{r-1} - T)}.$$

上式代入 $t = t_i^r + T$ 产生

$$\|\bar{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 \leq \varepsilon_i^2 e^{-\frac{\lambda_{\min}(\bar{Q}_i)}{2\lambda_{\max}(P_i)}(t_i^r - t_i^{r-1})}.$$

考虑 $t_i^r - t_i^{r-1} \geq \Delta_i$, 再根据(5.24)和(5.25), 最终可以得到 $\|\bar{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 \leq \alpha_i^2 \varepsilon_i^2$ 。

3.(5.9f)中的控制约束满足, 即 $\bar{u}_i(t; t_i^r) \in \mathbb{U}_i, t \in [t_i^r, t_i^r + T]$ 。

从控制输入 $\bar{u}_i(t; t_i^r)$ 的构造(5.14)中可知: 当 $t \in [t_i^{r-1}, t_i^{r-1} + T]$, $\bar{u}_i(t; t_i^r) = \bar{u}^*(t; t_i^{r-1}) \in \mathbb{U}_i$; 当 $t \in [t_i^{r-1} + T, t_i^r + T]$, 由于 $\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r) \in \mathbb{X}_i^a$, 根据引理 5.1, 有 $\bar{u}_i(t; t_i^r) = K_i \bar{x}(t; t_i^r) \in \mathbb{U}_i$ 。

4. (5.9g)中的稳定性约束满足, 即 $\hat{J}_i(\bar{x}_i(t; t_i^r), \bar{u}_i(t; t_i^r)) \leq \hat{J}_i(\bar{x}_i(t; t_i^r), \bar{u}_i(t; t_i^r))$ 。

显然, 此不等式自然成立。 ■

由上述分析可知, 只要满足充分条件 (5.25), 就可以保证迭代可行性。与以往研究相比, 本章提出的双模型策略需要满足的条件更少, 从而设计上更简单。

注 为了保证 OCP 的迭代可行性, 需要初始可行。对于耦合系统, OCP 的可行性依赖于耦合模型。为此, 许多研究假设存在一个假设状态轨迹 $x_j^a(t; 0), j \in \mathcal{N}_i^u$ 使得 OCP 在初始时刻有解, 例如 [93, 131, 151]。在这种情况下, 初始的

假设状态轨迹 $x_j^a(t; 0)$, $j \in \mathcal{N}_i^u$ 需要仔细地选择从而保证 OCP 的初始可行。然而, 本章所提双模型策略的可行性依赖于解耦模型, 所以本章所提的策略不再需要严格选择的初始假设状态。

注 根据式(5.23)和(5.25)中的条件可知, 一旦控制参数 α_i 和 ε_i 选定, 预测时域 T 就能确定。我们通常想要获得一个较大的预测时域 T 来保证 OCP 的可行性。然而, 从条件(5.19)中可以看出, T 越大, 触发阈值越小, 这意味着触发频率就越高。因此, 预测时域 T 的选择需要在满足条件的同时考虑触发情况。

5.4.3 稳定性分析

本部分给出定理5.7, 说明整个系统稳定的充分条件。

定理 5.7 对于系统(5.2), 在假设5.1-5.5成立的前提下, 如果以下条件成立

$$\frac{L_{Q_i} \lambda_{\max}(\sqrt{\bar{Q}_i})}{L_{f_i} \lambda_{\min}(\sqrt{P_i})} (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) (1 - e^{L_{f_i}(\Delta_i - T)}) + (1 - \alpha_i^2) \varepsilon_i^2 < \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \Delta_i (\alpha_i \varepsilon_i)^2, \quad (5.30)$$

$$\xi \leq \frac{\beta \varepsilon \lambda_{\min}(P^{-1/2} \bar{Q} P^{-1/2})}{2}, \quad (5.31)$$

那么在算法5.1下, 闭环系统是稳定的。

证明 首先证明对每个子系统 i , 其终端约束集外的状态, 即 $x_i(t), x_i(t) \notin \mathbb{X}_i^a$ 将在有限时间进入到终端约束集 \mathbb{X}_i^a 。候选的 Lyapunov 函数选为

$$V_i(t_i^r) := \hat{J}_i(\hat{x}_i(t; t_i^r), \tilde{u}_i^*(t; t_i^r)). \quad (5.32)$$

考虑到稳定性约束(5.9g), 可以得到 $V_i(t_i^r) - V_i(t_i^{r-1}) \leq \hat{J}_i(\bar{x}_i(t; t_i^r), \bar{u}_i(t; t_i^r)) - \hat{J}_i(\hat{x}_i(t; t_i^{r-1}), \tilde{u}_i^*(t; t_i^{r-1}))$ 。

根据式(5.13)和(5.14), 可以得到下式成立

$$\hat{J}_i(\bar{x}_i(t; t_i^r), \bar{u}_i(t; t_i^r)) - \hat{J}_i(\hat{x}_i(t; t_i^{r-1}), \tilde{u}_i^*(t; t_i^{r-1})) = a + b + c, \quad (5.33)$$

其中

$$\begin{aligned} a &:= - \int_{t_i^{r-1}}^{t_i^r} (\|\hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i}^2 + \|\tilde{u}_i(s; t_i^{r-1})\|_{R_i}^2) ds, \\ b &:= \int_{t_i^r}^{t_i^{r-1}+T} (\|\bar{x}_i(s; t_i^r)\|_{Q_i}^2 - \|\hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i}^2) ds, \\ c &:= \int_{t_i^{r-1}+T}^{t_i^r+T} (\|\bar{x}_i(s; t_i^r)\|_{Q_i}^2 + \|\bar{u}_i(s; t_i^r)\|_{R_i}^2) ds \\ &\quad + \|\bar{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 - \|\hat{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^{r-1})\|_{P_i}^2. \end{aligned}$$

根据式(5.28)可以得到 $\|x_i(s) - \hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i} \leq (1 - \alpha_i)\varepsilon_i$, $s \in [t_i^{r-1}, t_i^r]$ 。因为 $x_i(t) \notin \mathbb{X}_i^a$, 所以有不等式 $\|\hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i} \geq \|\hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i} - \|x_i(s) - \hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i} \geq \alpha_i\varepsilon_i$ 成立。因此, 进一步得到

$$a \leq - \int_{t_i^{r-1}}^{t_i^r} (\|\hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i}^2) ds \leq - \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \Delta_i (\alpha_i \varepsilon_i)^2. \quad (5.34)$$

根据研究 [152], 总是存在常数 L_{Q_i} 和 L_{P_i} 使得对于任意 $x, y \in \mathbb{X}_i, i \in \mathcal{V}$, 不等式 $\|x\|_{Q_i}^2 - \|y\|_{Q_i}^2 \leq L_{Q_i} \|x - y\|_{Q_i}$ 和 $\|x\|_{P_i}^2 - \|y\|_{P_i}^2 \leq L_{P_i} \|x - y\|_{P_i}$ 成立。因此, 我们可以得到

$$\begin{aligned} b &\leq \int_{t_i^r}^{t_i^{r-1}+T} L_{Q_i} (\|\bar{x}_i(s; t_i^r) - \hat{x}_i(s; t_i^{r-1})\|_{Q_i}) ds \\ &\stackrel{(5.29)}{\leq} \int_{t_i^r}^{t_i^{r-1}+T} \frac{\lambda_{\max}(Q_i)}{\lambda_{\min}(P_i)} L_{Q_i} (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) e^{L_{f_i}(s-t_i^{r-1}-T)} ds \\ &\leq \frac{L_{Q_i} \lambda_{\max}(Q_i)}{L_{f_i} \lambda_{\min}(P_i)} (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) (1 - e^{L_{f_i}(\Delta_i - T)}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

根据引理 5.1 可以得到

$$\begin{aligned} c &\leq \|\bar{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 - \|\bar{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 \\ &\quad - \|\bar{x}_i(t_i^r + T; t_i^r)\|_{P_i}^2 - \|\hat{x}_i(t_i^{r-1} + T; t_i^{r-1})\|_{P_i}^2 \\ &\stackrel{(5.29)}{\leq} (1 - \alpha_i^2) \varepsilon_i^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

综合式 (5.34), (5.35) 和 (5.36), 我们有

$$\begin{aligned} V_i(t_i^r) - V_i(t_i^{r-1}) &\leq - \frac{\lambda_{\min}(Q_i)}{\lambda_{\max}(P_i)} \Delta_i (\alpha_i \varepsilon_i)^2 + L_{P_i} (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) \\ &\quad + \frac{L_{Q_i} \lambda_{\max}(Q_i)}{L_{f_i} \lambda_{\min}(P_i)} (\varepsilon_i - \alpha_i \varepsilon_i) (1 - e^{L_{f_i}(\Delta_i - T)}) \\ &\stackrel{(5.30)}{<} 0. \end{aligned}$$

从而利用研究 [33] 中定理 1, 状态 $x(t)$, $x(t) \notin \mathbb{X}^a$ 将在有限时间进入 \mathbb{X}^a 。

其次是证明整个系统的状态一旦进入终端集后将会一直在终端集 \mathbb{X}^a 里面。由引理 5.2 可得到 $x(t)^T P x(t)$ 沿着系统 $\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) + w(t)$ 的轨迹的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_f(x(t))|_{\dot{x}(t)=F(x(t), Kx(t))+w(t)} &\leq -\|x(t)\|_Q^2 \left(\beta - \frac{2\|w(t)\|_P}{\lambda_{\min}(P^{-1/2} \bar{Q} P^{-1/2}) \|x(t)\|_P} \right) \\ &\stackrel{(5.31)}{\leq} 0. \end{aligned}$$

此结果意味着 \mathbb{X}^a 是一个鲁棒正不变集, 从而状态将一直在集合 \mathbb{X}^a 里。证毕。 ■

注 定理5.6-5.7建立了保证 OCP 迭代可行和整体系统稳定的充分条件，也提供了控制参数选择的依据。实际算法实现时可以按照以下步骤确定控制参数。

- 1) 根据引理5.1 和引理 5.2选择矩阵 $Q_i, R_i, P_i, i \in \mathcal{V}$ ，并确定终端集 \mathbb{X}_i^a 。
- 2) 根据系统动态方程和系统所满足的约束，计算参数 ξ_i 和 θ_{ij} ，然后选择合适的 α_i 。根据条件(5.23)-(5.25)和(5.30) 确定预测时域 T 和最小触发间隔 Δ_i 。

5.5 仿真验证

本部分将本章所提出的策略应用于三个物块-弹簧-阻尼子系统组成的系统 [91] 来验证所提策略的有效性。

系统的动态方程描述如下所示：

$$\begin{aligned}\dot{x}_{11}(t) &= x_{12}(t) \\ \dot{x}_{12}(t) &= -\frac{k_d}{m}x_{12}(t) - \frac{k_s}{m}e^{-x_{11}(t)}x_{11}(t) - \frac{k_c}{m}(x_{11}(t) - x_{21}(t)) + \frac{1}{m}u_1 + w_1(t) \\ \dot{x}_{21}(t) &= x_{22}(t) \\ \dot{x}_{22}(t) &= -\frac{k_d}{m}x_{22}(t) - \frac{k_s}{m}e^{-x_{21}(t)}x_{21}(t) - \frac{k_c}{m}(x_{21}(t) - x_{11}(t)) - \frac{k_c}{m}(x_{21}(t) \\ &\quad - x_{31}(t)) + \frac{1}{m}u_2 + w_2(t) \\ \dot{x}_{31}(t) &= x_{32}(t) \\ \dot{x}_{32}(t) &= -\frac{k_d}{m}x_{32}(t) - \frac{k_s}{m}e^{-x_{31}(t)}x_{31}(t) - \frac{k_c}{m}(x_{31}(t) - x_{21}(t)) + \frac{1}{m}u_3 + w_3(t)\end{aligned}$$

其中 x_{i1} 和 x_{i2} ($i = 1, 2, 3$) 分别是物块 i 的位移和速度。 m 是物块的质量， k_s 是物块 i 的局部非线性弹簧刚度， k_d 是局部粘滞阻尼， k_c 是不同物块之间相互连接的弹性刚度， u_i 是控制输入， w_i 是外部扰动。系统的各个参数为： $m = 1.25$ kg, $k_s = 0.7$ N/m, $k_d = 1.3$ Ns/m, $k_c = 0.005$ N/m。外部扰动为 $w_i = 0.0027, i = 1, 2, 3$ 。状态和控制输入约束为： $\mathbb{X}_i = \{x_i : -1\text{m} \leq x_{i1} \leq 1\text{m}, -1\text{m/s} \leq x_{i2} \leq 1\text{m/s}\}$, $\mathbb{U}_i = \{u_i : -1\text{N} \leq u_i \leq 1\text{N}\}$ 。三个物块的初始状态分别是 $x_1(0) = [0.5, 0]$, $x_2(0) = [0.5, 0]$, $x_3(0) = [-0.55, 0]$ 。

为了执行算法5.1，令采样间隔 $\delta_i = 0.1\text{s}, i = 1, 2, 3$ 。权重矩阵设置为 $Q_i = \tilde{Q}_i = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, R_i = \tilde{R}_i = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3$ 。基于此，根据假设5.3，利用 LQR 计算得到局部状态反馈控制律为 $K_1 = K_3 = [-0.8752 \ -1.1245], K_2 = [-0.8724 \ -1.1230]$ 。根据引理5.1 和引理 5.2得到 $P_1 = P_3 = \tilde{P}_1 = \tilde{P}_3 = \begin{bmatrix} 0.2915 & 0.1094 \\ 0.1094 & 0.1406 \end{bmatrix}$, $P_2 = \tilde{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.2911 & 0.1091 \\ 0.1091 & 0.1404 \end{bmatrix}$, $\varepsilon_i = 0.19, i = 1, 2, 3$ 。那么，根据假设5.2，系统的 Lipschitz 常数为 $L_{f_i} = 2.5, i = 1, 2, 3$ 。最后根据定理5.5-5.7，可以选择参数

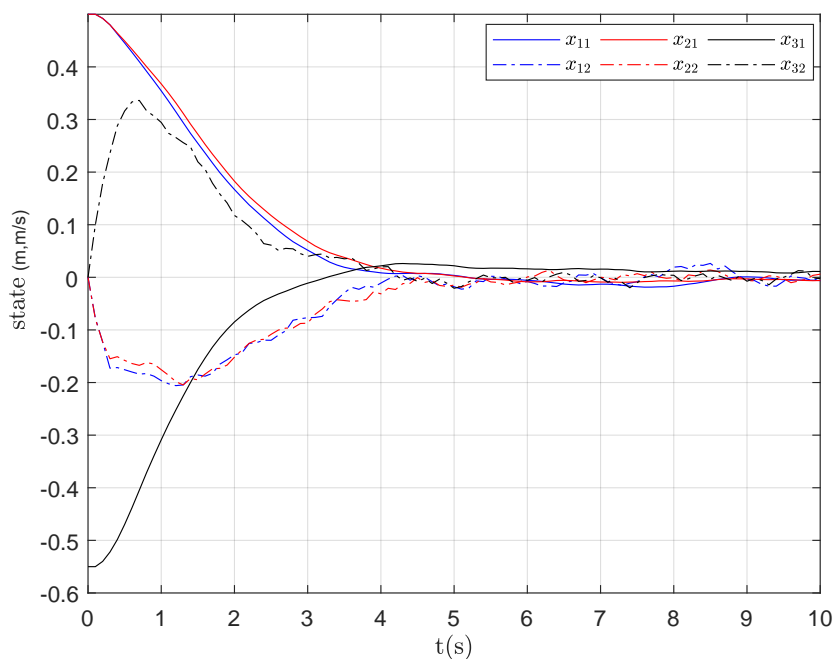


图 5.2 每个物块的状态轨迹

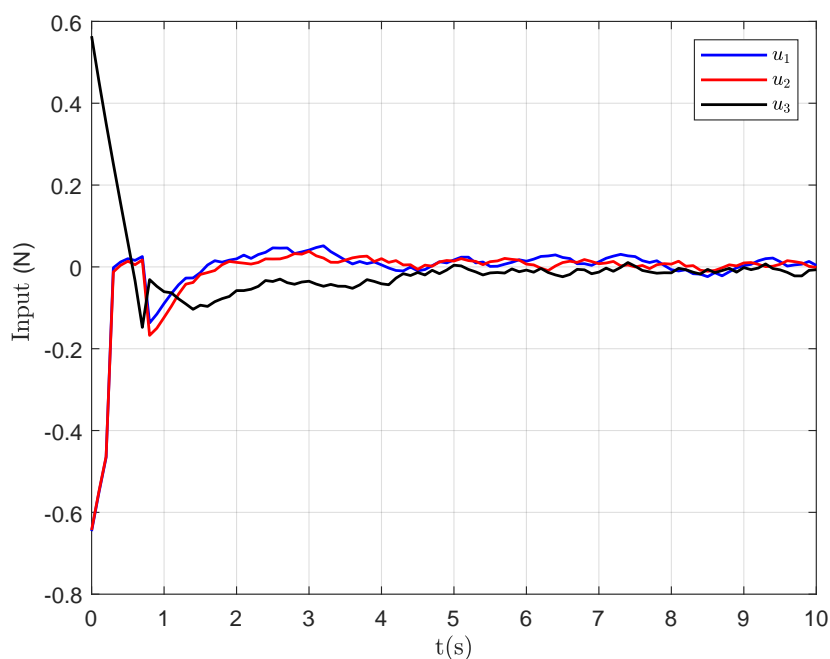


图 5.3 每个物块的控制输入

$\alpha_i = 0.97$, 预测时域为 $T_i = 0.7s$, $i = 1, 2, 3$ 。

仿真结果如图5.2-5.5所示。各物块的状态 (位移、速度) 和控制输入如图5.2-5.3所示。可以看出, 闭环系统是稳定的, 状态和控制输入约束是满足的。传统自触发机制 ([55, 125, 147]) 和本章所提算法下各物块的触发时刻分别如图 5.4和图5.5所示。触发的总次数可以表示通信资源的消耗。可以看出, 在 10s 中, 图5.4中触发次数为 12 次, 图5.5中触发次数为 6 次。传统自触发机制和本章所提算法的平均计算时间分别为 2.0247s 和 1.8023s。所以, 本章所提算法可以更有效地节省

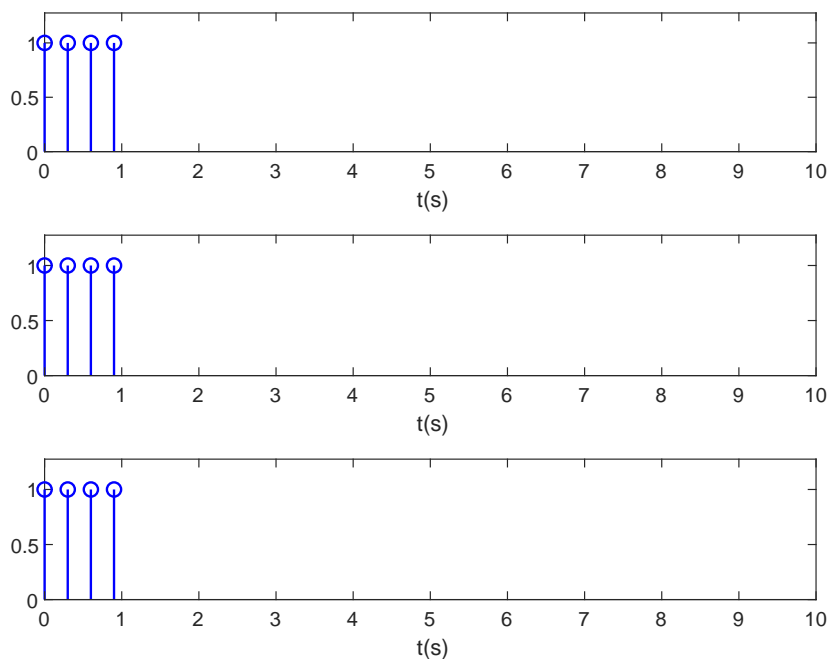


图 5.4 传统自触发机制下的触发时刻

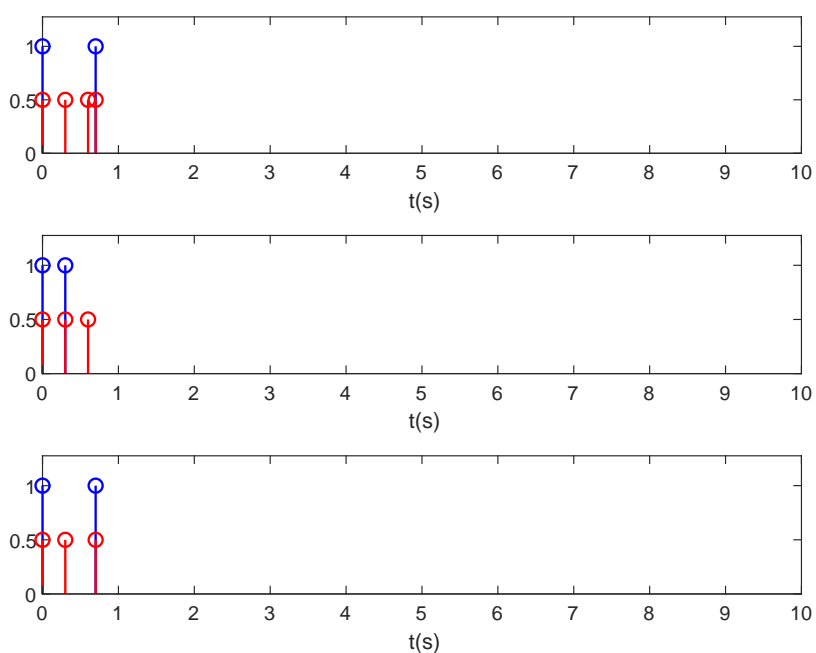


图 5.5 所提算法下的触发时刻（蓝线）和采样时刻（红线）

通信和计算资源。为了证明所提算法在提升控制性能上的优势，我们将所提算法与周期性触发的控制性能进行了比较。定义如下的性能指标

$$J = \sum_{t=0}^{10} \sum_{i=1}^3 (\|x_i(t)\|_{\hat{Q}_i}^2 + \|u_i(t)\|_{\hat{R}_i}^2).$$

所提算法下的控制性能指标是 2.6391，周期性触发下的控制性能指标为 2.6148。所以，本章所提算法具有与周期性触发相当的控制性能。

5.6 本章小结

本章针对耦合非线性系统提出了一种滚动 ST-DMPC 策略。该策略一方面在保持良好的控制性能的同时简化了分布式模型预测控制算法的设计，另一方面显著降低了计算和通信负担。建立了算法迭代可行和系统稳定的充分条件。最终通过数值仿真验证所提策略的有效性。

第6章 总结与展望

6.1 本文的主要研究工作

分布式模型预测应用范围越来越广，其实施需要在线求解局部优化问题，并通过通信网络传输求解得到的信息。因此，需要消耗计算和通信资源。在能源高效利用和一些实际应用背景下，对计算和通信资源的消耗提出了要求。鉴于此，本文主要研究分布式模型预测控制的事件驱动策略设计，主要目标是达到系统所需控制性能的同时节约资源，从而使得分布式模型预测控制能在理论和实际中得到更广泛的研究和应用。本文针对分布式模型预测控制的事件驱动策略设计所存在的四个主要问题展开了深入研究，提出了相应的解决方法。本文的主要工作总结如下：

1. 首先，面向 Lyapunov 分析方法保守的触发策略设计（对应第2章），提出了自适应 ET-DMPC 策略。具体包括在局部优化问题中定义了新的约束收缩集，使得多智能体系统的真实状态约束得以满足。设计了自适应事件触发条件，其包含了一个可变的预测时域，在保证优化问题迭代可行的基础上充分降低了计算和通信资源消耗。考虑到用传统 Lyapunov 方法分析多智能体系统一致性带来的控制参数设计保守问题，本文设计了衰减的预测时域。随着状态逐渐靠近终端区域，预测时域的值会逐渐减到 1，这就意味着每个智能体都能在有限时间进入定义的终端约束集，进而保证了跟踪一致性，避免了使用保守性高的传统 Lyapunov 分析框架。
2. 接着，面向邻居信息非精确可知的触发策略设计（对应第3章），提出了复合 ET-DMPC 策略。考虑到触发导致的邻居估计误差累积会使得单个以 Lyapunov 函数递减原则设计触发条件的保守性，本文设计了另一个与邻居估计信息无关的稳定性触发条件，二者以并行的方式触发，从而充分地降低了触发频率。另外，在终端约束集内构造了一系列基于反馈增益的开环控制序列，解决了传统使用双模策略导致的终端约束集内频繁发送问题，节约了通信资源。最后，利用反证法证明了即使 Lyapunov 函数可能不递减，系统依旧稳定。
3. 其次，面向预测模型不精确的触发策略设计（对应第4章），提出了基于扰动预测的 ET-DMPC 策略。具体来说，针对一般受扰非线性系统提出了基于中心路径的扰动预测方法，预测了系统外部扰动未来时间的行为。基于预测扰动构造了含有扰动预测项的预测模型，从而更为精确的预测系统的状态轨迹。此外，基于扰动变化率设计了新型约束收缩方案，保证了真实状态约束可以满足。从理论上证明了此策略会使得触发间隔更大，触发频

率更低。在此基础上,研究了特殊的输入仿射非线性系统。基于扰动的分离和补偿方法,将匹配扰动全部补偿,不匹配扰动予以预测,从而更为有效地抑制了扰动,更有效地降低了触发频率,节约了计算和通信资源。

4. 最后,面向系统动态互联的触发策略设计(对应5章),提出滚动 ST-DMPC 策略。考虑到动态耦合导致的状态预测误差难以估计且算法设计复杂,设计了一种双模型控制策略。具体来说,一方面,利用解耦的模型来估计状态预测误差,并基于此设计了可行性触发条件,避免兼容性等约束的使用,从而减少了有待设计的控制参数。另一方面,利用耦合模型预测系统未来轨迹,优化了控制性能。考虑到利用解耦模型会使得状态预测误差估计保守,设计了新型滚动自触发机制。具体来说,在两个相邻触发间隔间加入由自触发机制决定的采样时刻,在采样时刻得到此时系统的真实状态预测偏差,基于此偏差估计未来时刻的状态预测误差,有效地降低了误差估计的保守,从而有效降低触发频率。理论上证明了此策略能更有效地降低计算和通信负载。

6.2 研究展望

尽管本文已经对分布式模型预测控制的事件驱动策略设计问题进行了研究,并取得了一些研究成果。但是,在本文的研究过程中依然存在一些不足和值得进一步研究的问题。这里,作者根据自己的研究心得,将自己期待后续解决的问题总结如下:

1. **数据包丢失情况下的事件驱动分布式模型预测控制:** 本文假设的是数据包完美传输下的控制问题,但是实际一些情况下数据包传输会受到信道拥塞、传输碰撞、干扰等引发传输错误,从而不可避免地出现丢包现象。这种丢包会导致子系统本身局部信息或子系统邻居的信息传输丢失,从而影响系统整体的控制性能。因此,如何在数据包丢失情况下设计有效的事件驱动分布式模型预测控制方案具有重要理论意义和实际价值。
2. **基于数据驱动的事件驱动分布式模型预测控制:** 本文第4章研究了预测模型不精确导致事件频繁触发的问题,提出了基于扰动预测的策略,从而提高了预测精度,但是此方法还是依赖于系统的模型。受到基于数据驱动控制的启发,在一些可采集到丰富数据的系统中,用纯数据替代数学模型,从而减少对精确模型依赖,更有效降低触发频率。如何基于数据驱动并从理论上保证算法的可行性和系统的稳定是个非常值得研究的内容。
3. **基于扰动预测和自适应时域联合设计的事件驱动分布式模型预测控制:** 为了提高模型预测精度,从而减小模型预测误差,降低触发频率,本文第4章

提出了基于扰动预测的方法。非耦合系统的分布式模型预测控制中，局部优化问题的代价函数中含有邻居系统的估计信息，所以使用传统 Lyapunov 方法分析稳定性有一定保守性，于是本文第2章提出自适应时域的方法保证了稳定性。将二者联合设计，既提高预测精度，又降低参数设计保守性，更有效降低计算和通信负载，是有研究价值的。如何在预测模型中融合了扰动预测项的情况下，基于自适应时域保证可行性是值得研究的内容。

4. **事件驱动分布式模型预测控制在电力优化调度方面的应用：**传统的火力发电会产生二氧化碳，并且不合理的调度方案会浪费所发的电，造成更多的二氧化碳排放。新能源发电则不会产生二氧化碳等污染，所以在当前双碳的倡导下，如何优化调度传统发电和新能源发电，并优化城市配电方式从而减少碳排放是重要意义的。基于事件触发的分布式模型预测控制可以预测城市未来用电量，并且可以处理诸如电力潮流约束，碳排放约束等约束，所以将此方法应用于电力优化调度具有重要实际价值。

参考文献

- [1] RAWLINGS J B, MAYNE D Q, DIEHL M. Model predictive control: theory, computation, and design[M]. Madison: Nob Hill Publishing, 2017.
- [2] DUA P, KOURAMAS K, DUA V, et al. MPC on a chip—recent advances on the application of multi-parametric model-based control[J]. Computers & Chemical Engineering, 2008, 32(4-5): 754-765.
- [3] 解学书. 最优控制理论与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1986.
- [4] VINTER R B, VINTER R. Optimal control[M]. Boston: Birkhäuser, 2010.
- [5] 蔡宣三. 最优化与最优控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 1982.
- [6] TESTUD J, RICHALET J, RAULT A, et al. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes[J]. Automatica, 1978, 14(5): 413-428.
- [7] 邹涛, 丁宝苍, 张端. 模型预测控制工程应用导论[M]. 北京: 化学工业出版社, 2010.
- [8] CAMACHO E F, ALBA C B. Model predictive control[M]. London: Springer science & business media, 2013.
- [9] MORARI M, LEE J H. Model predictive control: past, present and future[J]. Computers & Chemical Engineering, 1999, 23(4-5): 667-682.
- [10] ALLGÖWER F, ZHENG A. Nonlinear model predictive control[M]. Boston: Birkhäuser, 2012.
- [11] BERBERICH J, KÖHLER J, MÜLLER M A, et al. Data-driven model predictive control with stability and robustness guarantees[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, 66(4): 1702-1717.
- [12] 董雷, 陈卉, 蒲天骄, 等. 基于模型预测控制的主动配电网多时间尺度动态优化调度[J]. 中国电机工程学报, 2016, 36(17): 8.
- [13] KUMAR A S, AHMAD Z. Model predictive control (MPC) and its current issues in chemical engineering[J]. Chemical Engineering Communications, 2012, 199(4): 472-511.
- [14] BAGESHWAR V L, GARRARD W L, RAJAMANI R. Model predictive control of transitional maneuvers for adaptive cruise control vehicles[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2004, 53(5): 1573-1585.
- [15] SHEN C, SHI Y, BUCKHAM B. Path-following control of an AUV: A multiobjective model predictive control approach[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2018, 27(3): 1334-1342.
- [16] SCATTOLINI R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control—a review[J]. Journal of Process Control, 2009, 19(5): 723-731.

- [17] LI S, ZHENG Y. Distributed model predictive control for plant-wide systems[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2016.
- [18] MAESTRE J M, NEGENBORN R R, et al. Distributed model predictive control made easy: Vol. 69[M]. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2014.
- [19] CHRISTOFIDES P D, SCATTOLINI R, DE LA PENA D M, et al. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions[J]. *Computers & Chemical Engineering*, 2013, 51: 21-41.
- [20] 蔡星, 谢磊, 苏宏业, 等. 基于串联结构的分布式模型预测控制[J]. *自动化学报*, 2013, 39(5): 9.
- [21] HEEMELS W P, JOHANSSON K H, TABUADA P. An introduction to event-triggered and self-triggered control[C]//51st IEEE conference on decision and control. IEEE, 2012: 3270-3285.
- [22] PENG C, LI F. A survey on recent advances in event-triggered communication and control [J]. *Information Sciences*, 2018, 457: 113-125.
- [23] HU S, YUE D. Event-triggered control design of linear networked systems with quantizations [J]. *ISA Transactions*, 2012, 51(1): 153-162.
- [24] CUTLER C R, RAMAKER B L. Dynamic matrix control: A computer control algorithm [C]//Proceedings of Automatic Control Conference. 1980: 72.
- [25] CLARKE D W, MOHTADI C, TUFFS P S. Generalized predictive control—part I. the basic algorithm[J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 137-148.
- [26] CLARKE D W, MOHTADI C, TUFFS P S. Generalized predictive control—part II extensions and interpretations[J]. *Automatica*, 1987, 23(2): 149-160.
- [27] KWON W, PEARSON A. On feedback stabilization of time-varying discrete linear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, 23(3): 479-481.
- [28] MAYNE D Q, MICHALSKA H. Receding horizon control of nonlinear systems[C]// Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 1988: 464-465.
- [29] CHEN C, SHAW L. On receding horizon feedback control[J]. *Automatica*, 1982, 18(3): 349-352.
- [30] BITMEAD R R, GEVERS M, WERTZ V. Adaptive optimal control the thinking man's GPC [M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1990.
- [31] RAWLINGS J B, MUSKE K R. The stability of constrained receding horizon control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(10): 1512-1516.
- [32] MICHALSKA H, MAYNE D Q. Robust receding horizon control of constrained nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1623-1633.
- [33] CHEN H, ALLGÖWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control

- scheme with guaranteed stability[J]. *Automatica*, 1998, 34(10): 1205-1217.
- [34] YU S, REBLE M, CHEN H, et al. Inherent robustness properties of quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control[J]. *Automatica*, 2014, 50(9): 2269-2280.
- [35] CHISCI L, ROSSITER J A, ZAPPA G. Systems with persistent disturbances: Predictive control with restricted constraints[J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1019-1028.
- [36] MAYNE D Q, LANGSON W. Robustifying model predictive control of constrained linear systems[J]. *Electronics Letters*, 2001, 37(23): 1422-1423.
- [37] LANGSON W, CHRYSOCHOOS I, RAKOVIĆ S, et al. Robust model predictive control using tubes[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 125-133.
- [38] LIMON D, ALVARADO I, ALAMO T, et al. On the design of robust tube-based MPC for tracking[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2008, 41(2): 15333-15338.
- [39] ALVARADO I, LIMÓN D, ALAMO T, et al. Output feedback robust tube based mpc for tracking of piece-wise constant references[C]//46th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2007: 2175-2180.
- [40] RAKOVIĆ S V, KOUVARITAKIS B, CANNON M. Equi-normalization and exact scaling dynamics in homothetic tube model predictive control[J]. *Systems & Control Letters*, 2013, 62(2): 209-217.
- [41] FLEMING J, KOUVARITAKIS B, CANNON M. Regions of attraction and recursive feasibility in robust MPC[C]//21st Mediterranean Conference on Control and Automation. IEEE, 2013: 801-806.
- [42] RAKOVIĆ S V, LEVINE W S, AÇIKMESE B. Elastic tube model predictive control[C]//American Control Conference. IEEE, 2016: 3594-3599.
- [43] KÖHLER J, SOLOPERTO R, MÜLLER M A, et al. A computationally efficient robust model predictive control framework for uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, 66(2): 794-801.
- [44] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789-814.
- [45] LIMÓN D, ALAMO T, SALAS F, et al. Input to state stability of min-max MPC controllers for nonlinear systems with bounded uncertainties[J]. *Automatica*, 2006, 42(5): 797-803.
- [46] RAIMONDO D M, LIMON D, LAZAR M, et al. Min-Max model predictive control of nonlinear systems: A unifying overview on stability[J]. *European Journal of Control*, 2009, 15(1): 5-21.
- [47] CASAVOLA A, GIANNELLI M, MOSCA E. Min-Max predictive control strategies for input-saturated polytopic uncertain systems[J]. *Automatica*, 2000, 36(1): 125-133.
- [48] LU Y, ARKUN Y. Quasi-min-max mpc algorithms for lpv systems[J]. *Automatica*, 2000, 36

- (4): 527-540.
- [49] LU Y, ARKUN Y. A quasi-min-max MPC algorithm for linear parameter varying systems with bounded rate of change of parameters[C]//American Control Conference. IEEE, 2000: 3234-3238.
- [50] DING B. Properties of parameter-dependent open-loop MPC for uncertain systems with polytopic description[J]. *Asian Journal of Control*, 2010, 12(1): 58-70.
- [51] HU J, DING B. An efficient offline implementation for output feedback min-max MPC[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(2): 492-506.
- [52] LI H, SHI Y. Networked min-max model predictive control of constrained nonlinear systems with delays and packet dropouts[J]. *International Journal of Control*, 2013, 86(4): 610-624.
- [53] LIU C, LI H, GAO J, et al. Robust self-triggered min-max model predictive control for discrete-time nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2018, 89: 333-339.
- [54] MARRUEDO D L, ALAMO T, CAMACHO E. Input-to-state stable MPC for constrained discrete-time nonlinear systems with bounded additive uncertainties[C]//41st IEEE Conference on Decision and Control. 2002: 4619-4624.
- [55] SUN Z, DAI L, LIU K, et al. Robust self-triggered MPC with adaptive prediction horizon for perturbed nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2019, 64(11): 4780-4787.
- [56] LI P, KANG Y, ZHAO Y B, et al. A novel self-triggered MPC scheme for constrained input-affine nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2020, 68(1): 306-310.
- [57] LI P, WANG T, KANG Y, et al. Event-based model predictive control for nonlinear systems with dynamic disturbance[J]. *Automatica*, 2022, 145: 110533.
- [58] LI P, KANG Y, WANG T, et al. Disturbance prediction based adaptive event-triggered model predictive control for perturbed nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022.
- [59] LI H, SHI Y. Robust distributed model predictive control of constrained continuous-time nonlinear systems: A robustness constraint approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 59(6): 1673-1678.
- [60] LI H, YAN W, SHI Y, et al. Periodic event-triggering in distributed receding horizon control of nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2015, 86: 16-23.
- [61] LI H, SHI Y. Event-triggered robust model predictive control of continuous-time nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2014, 50(5): 1507-1513.
- [62] BEN-NOON O, GALULA Y, ORON L. System and method for controlling access to an in-vehicle communication network[M]. Google Patents, 2022.

- [63] FAHEEM M, SHAH S B H, BUTT R A, et al. Smart grid communication and information technologies in the perspective of industry 4.0: Opportunities and challenges[J]. *Computer Science Review*, 2018, 30: 1-30.
- [64] 戴荔. 分布式随机模型预测控制方法研究[D]. 北京: 北京理工大学, 2016.
- [65] 李少远. 工业过程系统的预测控制[J]. *控制工程*, 2010(4): 407-415.
- [66] BAKULE L. Decentralized control: An overview[J]. *Annual reviews in control*, 2008, 32(1): 87-98.
- [67] ŠILJAK D D, ZEČEVIĆ A. Control of large-scale systems: Beyond decentralized feedback [J]. *Annual Reviews in Control*, 2005, 29(2): 169-179.
- [68] KARAMI Z, SHAFIEE Q, KHAYAT Y, et al. Decentralized model predictive control of DC microgrids with constant power load[J]. *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, 2019, 9(1): 451-460.
- [69] MAGNI L, SCATTOLINI R. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2006, 42(7): 1231-1236.
- [70] RAIMONDO D, MAGNI L, SCATTOLINI R. Decentralized MPC of nonlinear systems: An input-to-state stability approach[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2007, 17(17): 1651-1667.
- [71] ALESSIO A, BEMPORAD A. Stability conditions for decentralized model predictive control under packet drop communication[C]//*American Control Conference*. IEEE, 2008: 3577-3582.
- [72] NEGENBORN R R, MAESTRE J M. Distributed model predictive control: An overview and roadmap of future research opportunities[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2014, 34(4): 87-97.
- [73] MA A, LIU K, ZHANG Q, et al. Distributed MPC for linear discrete-time systems with disturbances and coupled states[J]. *Systems & Control Letters*, 2020, 135: 104578.
- [74] RAWLINGS J B, STEWART B T. Coordinating multiple optimization-based controllers: New opportunities and challenges[J]. *Journal of Process Control*, 2008, 18(9): 839-845.
- [75] MAYNE D Q, SERON M M, RAKOVIĆ S. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 219-224.
- [76] RICHARDS A, HOW J P. Robust distributed model predictive control[J]. *International Journal of control*, 2007, 80(9): 1517-1531.
- [77] FAWAL H, GEORGES D, BORNARD G. Optimal control of complex irrigation systems via decomposition-coordination and the use of augmented lagrangian[C]//*IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. IEEE, 1998: 3874-3879.
- [78] CAMPONOGARA E, JIA D, KROGH B H, et al. Distributed model predictive control[J].

- IEEE Control Systems Magazine, 2002, 22(1): 44-52.
- [79] DUNBAR W B, MURRAY R M. Distributed receding horizon control for multi-vehicle formation stabilization[J]. *Automatica*, 2006, 42(4): 549-558.
- [80] WANG P, DING B. Distributed rhc for tracking and formation of nonholonomic multi-vehicle systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(6): 1439-1453.
- [81] LI H, YAN W. Receding horizon control based consensus scheme in general linear multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2015, 56: 12-18.
- [82] GAO Y, DAI L, XIA Y, et al. Distributed model predictive control for consensus of nonlinear second-order multi-agent systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, 27(5): 830-842.
- [83] WANG Q, DUAN Z, LV Y, et al. Distributed model predictive control for linear-quadratic performance and consensus state optimization of multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 51(6): 2905-2915.
- [84] YANG C, CHEN B, BU L, et al. Low-order dynamical model and distributed coordinated model predictive control for multi-stage belt conveyor systems[J]. *Journal of Process Control*, 2023, 124: 83-91.
- [85] NAWAZ A, WU J, YE J, et al. Distributed mpc-based energy scheduling for islanded multi-microgrid considering battery degradation and cyclic life deterioration[J]. *Applied Energy*, 2023, 329: 120168.
- [86] SHEN C, SHI Y. Distributed implementation of nonlinear model predictive control for AUV trajectory tracking[J]. *Automatica*, 2020, 115: 108863.
- [87] LIU M, SHI Y, LIU X. Distributed MPC of aggregated heterogeneous thermostatically controlled loads in smart grid[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2015, 63(2): 1120-1129.
- [88] CHILIN D, LIU J, CHEN X, et al. Fault detection and isolation and fault tolerant control of a catalytic alkylation of benzene process[J]. *Chemical Engineering Science*, 2012, 78: 155-166.
- [89] LEIRENS S, ZAMORA C, NEGENBORN R, et al. Coordination in urban water supply networks using distributed model predictive control[C]//American Control Conference. IEEE, 2010: 3957-3962.
- [90] JIA D, KROGH B. Min-Max feedback model predictive control for distributed control with communication[C]//American Control Conference. IEEE, 2002: 4507-4512.
- [91] LIU X, SHI Y, CONSTANTINESCU D. Distributed model predictive control of constrained weakly coupled nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2014, 74: 41-49.
- [92] RIVERSO S, FARINA M, FERRARI-TRECATE G. Plug-and-play decentralized model pre-

- dictive control for linear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2013, 58(10): 2608-2614.
- [93] DUNBAR W B. Distributed receding horizon control of dynamically coupled nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, 52(7): 1249-1263.
- [94] WANG P, DING B. Distributed receding horizon control for dynamically coupled large scale systems[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2013, 46(13): 254-259.
- [95] FARINA M, SCATTOLINI R. Distributed predictive control: A non-cooperative algorithm with neighbor-to-neighbor communication for linear systems[J]. Automatica, 2012, 48(6): 1088-1096.
- [96] ZHENG Y, LI S, LI N. Distributed model predictive control over network information exchange for large-scale systems[J]. Control engineering practice, 2011, 19(7): 757-769.
- [97] LONG Y, LIU S, XIE L, et al. Distributed nonlinear model predictive control based on contraction theory[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(2): 492-503.
- [98] MA S, ZOU Y, LI S. Distributed model predictive control with priority coordination for limited supply multi-zone HVAC systems[J]. Journal of Process Control, 2022, 117: 157-168.
- [99] ALEJANDRO J, ARCE A, BORDONS C. Combined environmental and economic dispatch of smart grids using distributed model predictive control[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2014, 54: 65-76.
- [100] CHEN X, HEIDARINEJAD M, LIU J, et al. Distributed economic mpc: Application to a nonlinear chemical process network[J]. Journal of Process Control, 2012, 22(4): 689-699.
- [101] BORGERS D P, HEEMELS W. Event-separation properties of event-triggered control systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(10): 2644-2656.
- [102] ZHANG J, GANG F. Event-driven observer-based output feedback control for linear systems[J]. Automatica, 2014, 50: 1852-1859.
- [103] DOLK V S, BORGERS D P, HEEMELS W. Output-based and decentralized dynamic event-triggered control with guaranteed l_p -gain performance and zeno-freeness[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2016, 62(1): 1-1.
- [104] GU Z, YUE D, TIAN E. On designing of an adaptive event-triggered communication scheme for nonlinear networked interconnected control systems[J]. Information Sciences, 2017, 422: 257-270.
- [105] LIU C, GAO J, LI H, et al. Aperiodic robust model predictive control for constrained continuous-time nonlinear systems: An event-triggered approach[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2017, 48(5): 1397-1405.

- [106] WANG M, SUN J, CHEN J. Input-to-state stability of perturbed nonlinear systems with event-triggered receding horizon control scheme[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2018, 66(8): 6393-6403.
- [107] HASHIMOTO K, ADACHI S, DIMAROGONAS D V. Event-triggered intermittent sampling for nonlinear model predictive control[J]. *Automatica*, 2017, 81: 148-155.
- [108] SUN Z, XIA Y, DAI L, et al. Tracking of unicycle robots using event-based MPC with adaptive prediction horizon[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2020, 25(2): 739-749.
- [109] INCREMONA G P, FERRARA A, MAGNI L. Asynchronous networked MPC with ISM for uncertain nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(9): 4305-4317.
- [110] WANG M, SUN J, CHEN J. Stabilization of perturbed continuous-time systems using event-triggered model predictive control[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 52(5): 4039-4051.
- [111] EQTAMI, DIMAROGONAS, KYRIAKOPOULOS. Event-triggered control for discrete-time systems[C]//*American Control Conference*. 2010: 4719-4724.
- [112] YOO J, JOHANSSON K H. Event-triggered model predictive control with a statistical learning[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2019.
- [113] HE N, SHI D. Event-based robust sampled-data model predictive control: A non-monotonic lyapunov function approach[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2017, 62(10): 2555-2564.
- [114] CUI D, LI H. Dual self-triggered model-predictive control for nonlinear cyber-physical systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 52(6): 3442-3452.
- [115] HASHIMOTO K, ADACHI S, DIMAROGONAS D V. Self-triggered model predictive control for nonlinear input-affine dynamical systems via adaptive control samples selection[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, 62(1): 177-189.
- [116] HENRIKSSON E, QUEVEDO D E, SANDBERG H, et al. Self-triggered model predictive control for network scheduling and control[J]. *IFAC Proceedings Volumes*, 2012, 45(15): 432-438.
- [117] LI H, YAN W, SHI Y. Triggering and control codesign in self-triggered model predictive control of constrained systems: With guaranteed performance[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(11): 4008-4015.
- [118] ZOU Y, SU X, LI S, et al. Event-triggered distributed predictive control for asynchronous coordination of multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2019, 99: 92-98.

- [119] ZHAN J, HU Y, LI X. Adaptive event-triggered distributed model predictive control for multi-agent systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2019, 134: 104531.
- [120] MI X, ZOU Y, LI S. Event-triggered MPC design for distributed systems toward global performance[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2018, 28(4): 1474-1495.
- [121] ZHAN J, JIANG Z P, WANG Y, et al. Distributed model predictive consensus with self-triggered mechanism in general linear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 15(7): 3987-3997.
- [122] HU Y, ZHAN J, LI X. Self-triggered distributed model predictive control for flocking of multi-agent systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2018, 12(18): 2441-2448.
- [123] MI X, ZOU Y, LI S, et al. Self-triggered DMPC design for cooperative multiagent systems [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2019, 67(1): 512-520.
- [124] LI H, LI X. Distributed model predictive consensus of heterogeneous time-varying multi-agent systems: With and without self-triggered mechanism[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2020, 67(12): 5358-5368.
- [125] HASHIMOTO K, ADACHI S, DIMAROGONAS D V. Distributed aperiodic model predictive control for multi-agent systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 9(1): 10-20.
- [126] YANG Y. Event-triggered distributed receding horizon control for tracking and formation of homogeneous multi-agent systems[J]. *ISA Transactions*, 2019, 85.
- [127] QIAN Y Y, LIU L, FENG G. Distributed event-triggered adaptive control for consensus of linear multi-agent systems with external disturbances[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 50(5): 2197-2208.
- [128] LI P, WANG T, KANG Y, et al. Event-triggered adaptive horizon model predictive control for perturbed nonlinear systems[C]//59th IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2020: 2392-2397.
- [129] WANG T, KANG Y, LI P, et al. Robust model predictive control for constrained networked nonlinear systems: An approximation-based approach[J]. *Neurocomputing*, 2020, 418: 56-65.
- [130] ZHAN J, JIANG Z P, WANG Y, et al. Distributed model predictive consensus with self-triggered mechanism in general linear multiagent systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 2018, 15(7): 3987-3997.
- [131] LIU C, LI H, SHI Y, et al. Distributed event-triggered model predictive control of coupled nonlinear systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2020, 58(2): 714-734.
- [132] MIRZAEI A, RAMEZANI A. Cooperative optimization-based distributed model predictive

- control for constrained nonlinear large-scale systems with stability and feasibility guarantees [J]. *ISA Transactions*, 2021.
- [133] DAI L, QIANG Z, SUN Z, et al. Distributed economic MPC for dynamically coupled linear systems with uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 52(6): 5301-5310.
- [134] ZHANG D, NGUANG S K, YU L. Distributed control of large-scale networked control systems with communication constraints and topology switching[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(7): 1746-1757.
- [135] ZHANG L, WANG J, GE Y, et al. Robust distributed model predictive control for uncertain networked control systems[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2014, 8(17): 1843-1851.
- [136] MA A, LIU K, ZHANG Q, et al. Event-triggered distributed MPC with variable prediction horizon[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020.
- [137] RAJHANS C, PATWARDHAN S C, PILLAI H. Discrete time formulation of quasi infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability[J]. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, 50(1): 7181-7186.
- [138] SUN X M, WANG X F, HONG Y, et al. Stabilization control design with parallel-triggering mechanism[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2016, 64(4): 3260-3267.
- [139] RUBAGOTTI M, ESTRADA A, CASTAÑOS F, et al. Integral sliding mode control for nonlinear systems with matched and unmatched perturbations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(11): 2699-2704.
- [140] SUN Z, XIA Y, DAI L, et al. Disturbance rejection MPC for tracking of wheeled mobile robot[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2017, 22(6): 2576-2587.
- [141] LIAO Y W, HEDRICK J K. Discrete-time integral sliding model predictive control for unmatched disturbance attenuation[C]//*American Control Conference. IEEE*, 2016: 2675-2680.
- [142] LIN X, GÖRGES D. Robust model predictive control of linear systems with predictable disturbance with application to multiobjective adaptive cruise control[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2019, 28(4): 1460-1475.
- [143] RUBAGOTTI M, RAIMONDO D M, FERRARA A, et al. Robust model predictive control with integral sliding mode in continuous-time sampled-data nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 56(3): 556-570.
- [144] SUN Z, XIA Y, DAI L, et al. Tracking of unicycle robots using event-based MPC with adaptive prediction horizon[J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2019, 25(2): 739-749.
- [145] QUEVEDO D E, NEŠIĆ D. Input-to-state stability of packetized predictive control over unreliable networks affected by packet-dropouts[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 56(2): 370-375.

-
- [146] CASTAÑOS F, FRIDMAN L. Analysis and design of integral sliding manifolds for systems with unmatched perturbations[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(5): 853-858.
- [147] EQTAMI A, HESHMATI-ALAMDARI S, DIMAROGONAS D V, et al. A self-triggered model predictive control framework for the cooperation of distributed nonholonomic agents [C]//52nd IEEE Conference on Decision and Control. IEEE, 2013: 7384-7389.
- [148] ZHU Y, OZGUNER U. Robustness analysis on constrained model predictive control for non-holonomic vehicle regulation[C]//American Control Conference. IEEE, 2009: 3896-3901.
- [149] ALESSIO A, BARCELLI D, BEMPORAD A. Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems[J]. Journal of Process Control, 2011, 21(5): 705-714.
- [150] ZHOU Y, LI D, XI Y, et al. Event-triggered distributed robust model predictive control for a class of nonlinear interconnected systems[J]. Automatica, 2022, 136: 110039.
- [151] KANG Y, WANG T, LI P, et al. Compound event-triggered distributed MPC for coupled nonlinear systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2022.
- [152] PAULAVIČIUS R, ŽILINSKAS J. Analysis of different norms and corresponding Lipschitz constants for global optimization[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2006, 12(4): 301-306.

致 谢

五年的研究生生涯已接近尾声，至此我的学生生涯也将结束，借此机会向曾今和现今陪伴我的每一个人致以最真挚的感谢！

感谢我的恩师康宇老师。感谢康老师五年前让我成为您的学生，让我在寻找研究生学校和导师多次失落后得到了安慰。初见康老师是在安徽省机器人协会成立大会上，康老师会中在专家面前讲话掷地有声，会后跟我谈话温文尔雅，让我既敬佩又欣喜。敬佩的是康老师的博学，欣喜的是康老师没有一点架子，我遇到了好老师。感谢康老师在五年的研究生科研和生活中给予我的悉心指导和无私帮助。您在科研上的严谨和奋进，在生活中的和蔼可亲，幽默风趣都深深的影响着我。在此，我想真挚的对您说一句：谢谢您，康老师，一日为师终身为父，学生将铭记于心。

感谢指导老师赵云波老师。赵老师是犹如诗人般的科研工作者，是您让我感受到了科研之美。您的科研思路和方法是我追求的目标，您对科研几乎完美的追求是我学习的榜样。感谢您几年来不求回报的指导，虽不是导师，在学生心中已然是导师。

感谢自动化系的季海波老师、殷保群老师、凌强老师、秦家虎老师、朱进等老师授予的专业知识。感谢自动化系和学院的教秘日常的帮助。

感谢李鹏飞师兄，科研如师，生活如兄，无需多言。

感谢饭团中陈绍冯师姐和赵振怡师姐无微不至的照顾，给我买夜灯，被子，零食等，裴丽红师妹的陪伴，饭团的几个小伙伴给予我许多温暖。感谢吕文君师兄、李泽瑞师姐、许镇义师兄、虞佩龙师兄在科研、工作、生活中的帮助。感谢张倩倩师姐和杨钰潇师姐对我的关心。感谢同门许婷这几年的一起奋斗。感谢许畅师弟、赵昀昇师弟等所有师弟师妹的陪伴。

感谢我的亲人们。感谢爷爷和外婆两位老人一直惦记我的学业和人生大事。感谢我的母亲，母亲为了我的求学和生活付出了所有，做过农民、工地工人、流水线员工、缝纫工、餐厅服务员、保姆等等。母亲虽只读小学二年级，却给了我人生最珍贵的精神财富。感谢母亲教于我的坚韧、善良、真诚和感恩。感谢父亲的付出，父爱如山。感谢我的姐姐大手牵着我的小手陪着我长大，将好的资源都让给了我。家人是安抚心灵的良药。

最后，感谢命运的眷顾。寄蜉蝣于天地，渺沧海之一粟。在有限的生命里，珍惜当下的每一天。

王涛

二零二三年四月五日于中国科学技术大学高新区

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. Yu Kang, **Tao Wang**, Pengfei Li, Zhenyi Xu, and Yun-Bo Zhao, “Compound event-triggered distributed MPC for coupled nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, doi: 10.1109/TCYB.2020.3019179 (对应正文第3章) .
2. **Tao Wang**, Yu Kang, Pengfei Li, and Yun-Bo Zhao, “Robust model predictive control for constrained networked nonlinear systems: an approximation-based approach”, *Neurocomputing*, vol. 418, pp. 56-65, 2020.
3. **Tao Wang**, Yu Kang, Pengfei Li, Yun-Bo Zhao, and Peilong Yu, “Robust approximation-based event-triggered MPC for constrained sampled-data systems”, *Journal of Systems Science and Complexity*, vol. 34, no. 6, pp. 2109-2124, 2021.
4. 王涛, 康宇, 李鹏飞, “基于自适应事件触发分布式模型预测控制的多智能体系统跟踪一致性,” *中国科学: 技术科学*, 2021, doi:10.1360/SST-2021-0379 (对应正文第2章) .
5. **Tao Wang**, Pengfei Li, Yu. Kang and Yun-Bo Zhao, “Self-triggered model predictive control for perturbed nonlinear systems: an iterative implementation”, *60th IEEE Conference on Decision and Control*, 2021, pp. 1281-1286.
6. Pengfei Li, **Tao Wang**, Yu Kang, Kun Li, and Yun-Bo Zhao, “Event-based model predictive control for nonlinear systems with dynamic disturbance,” *Automatica*, 2022, 145: 110533.
7. Pengfei Li, **Tao Wang**, Yu Kang and Yun-Bo Zhao, “Event-triggered adaptive horizon model predictive control for perturbed nonlinear systems”, *59th IEEE Conference on Decision and Control*, 2020, pp. 2392-2397 .
8. Pengfei Li, Yu Kang, **Tao Wang**, and Yun-Bo Zhao, “Disturbance prediction based adaptive event-triggered model predictive control for perturbed nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2022, doi:10.1109/TAC.2022.3169905.
9. Pengfei Li, Yu Kang, Yun-Bo Zhao, and **Tao Wang**, “Networked dual-mode adaptive horizon MPC for constrained nonlinear systems,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, vol. 51, no. 12, pp. 7435–7449, 2021.

10. Pengfei Li, Yu Kang, Yun-Bo Zhao, and **Tao Wang**, “A novel self-triggered MPC scheme for constrained input-affine nonlinear systems”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, vol. 68, no. 1, pp. 306-310, 2021.

待发表论文

1. **Tao Wang**, Yu Kang, Pengfei Li, and Yun-Bo Zhao, “Rolling Self-Triggered Distributed MPC for Dynamically Coupled Nonlinear Systems”, *Automatica*, Under Third Round Review (对应正文第 5 章) .

专利

1. 康宇, **王涛**, 李鹏飞, 赵云波, 吕文君. 一种自适应时域的事件触发模型预测控制方法 [P]. ZL202010479304.6, 2020-09-25.
2. 康宇, **王涛**, 刘文清, 李鹏飞, 曹洋, 张玉钧. 一种基于循环预测时域的车辆减排预测控制方法 [P]. ZL 2022 1 0801247.8, 2022-07-08.
3. 康宇, 李鹏飞, **王涛**, 陈绍冯, 吕文君. 一种网络化双模自适应时域模型控制方法及系统 [P]. ZL 202010479297.X, 2020-10-27.